

Τοπολογικά Προστατευμένη Κβαντική Πληροφορία και Φερμιόνια Majorana

Παναγιώτης Λυκουργιάς

4 Νοεμβρίου 2020

Κύριος επιβλέπων: Αλέξανδρος Καρανίκας

Συνεπιβλέποντες: Φώτιος Διάκονος, Ιωάννης Πάχος

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

«Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας» (MIS-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ)»



Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Περιεχόμενα

1	ΠΡΟΛΟΓΟΣ-ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	5
2	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
I	ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ	13
3	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ	15
3.1	Σύνδεση με την κλασική μηχανική	15
3.2	Μαθηματική έκφραση του ολοκληρώματος διαδρομών	18
3.3	Συνάρτηση επιμερισμού για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή	23
4	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΣΟ	29
4.1	Συνοχικές καταστάσεις	30
4.2	Ολοκλήρωμα διαδρομών με συνοχικές καταστάσεις	32
4.3	Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής με συνοχικές καταστάσεις	34
4.4	Μια πρόταση διόρθωσης	36
5	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΒΑΝΤΩΣΗ	41
5.1	Κβάντωση με ημιμορφές	42
5.2	Κατασκευή στο συνεχές	46
5.3	Εφαρμογή στις μποζονικές καταστάσεις	48
5.4	Συνθήκες κβάντωσης και το Θεώρημα Groenewold	50
5.5	Ένας χάρτης για το ολοκλήρωμα διαδρομών	55
6	ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ SPIN	61
6.1	Η συνάρτηση επιμερισμού ενός απλού συστήματος	61
6.2	Επιδορθώσεις	64
6.3	Ένας χάρτης για συστήματα spin	69
7	ΦΕΡΜΙΟΝΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΚΑΙ ΦΕΡΜΙΟΝΙΑ MAJORANA	71
7.1	Φερμιονικά πεδία και μεταβλητές Grassmann	71
7.2	Η εξάρτηση του φερμιονικού ολοκληρώματος από το φετάρισμα	75

7.3	Φερμιόνια Majorana	79
II ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ MAJORANA		83
8	ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΧΥ ΜΕ ΠΕΔΙΟ	85
8.1	Το μοντέλο ΧΥ με πεδίο	85
8.2	Συναρτήσεις συσχετισμού	87
8.3	Χρονοεξαρτώμενο μαγνητικό πεδίο	94
9	ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΜΗ ΤΟΠΙΚΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ Ε-	103
	ΛΕΥΘΕΡΙΑΣ	
9.1	Η τρίκλαδη αλυσίδα	104
9.2	Χημικό δυναμικό και τοπικοποίηση	109
9.3	Η πολλαπλότητα του εκφυλισμού	113
10	ΕΠΙΛΟΓΟΣ	115

Κεφάλαιο 1

ΠΡΟΛΟΓΟΣ- ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Όταν, με άγνοια κινδύνου, αποφάσισα να κάνω τα πρώτα μου βήματα στην έρευνα μπαίνοντας στη διαδικασία εκπόνησης μιας διδακτορικής διατριβής, η εικόνα που είχα για το πώς μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο ήταν, στην καλύτερη περίπτωση, διαστρεβλωμένη. Αφελώς, η εκτίμησή μου ήταν ότι απλώς πρόκειται για λίγα χρόνια διαβάσματος ακόμη. Διαβάσματος πολύ πιο δύσκολων πραγμάτων, βέβαια, αλλά πάντως διαβάσματος. Πλέον, σχεδόν έτοιμος να ολοκληρώσω την πορεία, μπορώ να πω πως τελικά αυτή η εκτίμηση ήταν εντελώς εκτός πραγματικότητας. Για την ακρίβεια, το μεγαλύτερο, προσωπικό, μου σοκ κατά τη διάρκεια της εμπειρίας αυτής -και το οποίο μου πήρε και τον περισσότερο χρόνο να χωνέψω- ήταν ότι η ιδέα που είχα για το πώς γίνεται το «διάβασμα» έπρεπε να αποκαθλωθεί εντελώς και να αντικατασταθεί από κάτι διαφορετικό, το οποίο θα μπορούσα να συνοψίσω στη φράση «αποτελεσματικό ψάξιμο». Πλέον, κατά τι σοφότερος πάνω σε αυτό το θέμα, οφείλω να αναγνωρίσω ότι αυτό είναι πολύ πιο δύσκολο, μιας και, σε αντίθεση με τη μελέτη, δεν υπάρχει ούτε υπόνοια μεθόδου για κάτι τέτοιο: η έρευνα, από ένα σημείο και μετά, ίσως μπορεί να κατανοηθεί ως μια καλλιτεχνική διαδικασία.

Κάτι που πιστεύουν πολλοί έξω από τον τομέα της έρευνας, είναι ότι η δυσκολία της έγκειται σε λειτουργικές παραμέτρους: στο ότι οι έννοιες γίνονται όλο και πιο δύσπεπτες, στο ότι τα προβλήματα προς αντιμετώπιση δεν έχουν γνωστή, κοινώς αποδεκτή, λύση, στον ανταγωνισμό κλπ. Ήδη από τη σύντομη -μόλις τέσσερα χρόνια- εμπειρία μου στον τομέα, μπορώ να πω ότι, στην πραγματικότητα, οι βασικές δυσκολίες της έρευνας δεν είναι αυτές· αντιθέτως, είναι, εν τέλει, οντολογικής φύσεως. Η όλη διαδικασία σε αναγκάζει, μοιραία, κάποια στιγμή να αντικρίσεις τα όρια των δυνατοτήτων της νόησής σου και να βρεις το σθένος να βουτήξεις στο κενό έξω από αυτά. Η έρευνα είναι μια άσκηση ταπεινότητας: είσαι αναγκασμένος να αποδεχτείς, με πολλές φορές βάνουσο τρόπο, τη ματαιότητα πολλών ιδεών σου -δε νομίζω ότι υπάρχει ερευνητής που να μην πέταξε, τουλάχιστον μια φορά, τη δουλειά μηνών στα σκουπίδια. Σε αναγκάζει να συμβιβαστείς με το ότι, πολλές φορές, ό,τι και να κάνεις δεν είναι αρκετό. Φτάνεις σε ένα εντελώς νέο επίπεδο

κατανόησης του μεγαλείου των γιγάντων της διανόησης και μένεις έκθαμβος από το πόσο δύσκολο είναι τελικά να γίνει κάτι που πολλές φορές ως τότε έκρινες, ελαφρά τη καρδία, ως «στοιχειώδες». Συνειδητοποιείς ότι δεν υπάρχει ούτε και εδώ παρθενογένεση, είναι αδύνατον απλά να σκεφτεί κανείς μία λύση: χρειάζεται μήνες και χρόνια τριβής η επίλυση ακόμη και του πιο, φαινομενικά, ασήμαντου προβλήματος -αν μη τι άλλο, αν δεν ήταν έτσι, θα είχε ήδη λυθεί. Καταλαβαίνεις ότι μια καλοεκτελεσμένη, μικρή ιδέα είναι πολύ καλύτερη από μια κακοεκτελεσμένη μεγάλη.

Το επιμύθιο των παραπάνω είναι ότι η πραγματική δυσκολία αυτής της υπόθεσης, σε αντίθεση με άλλες δουλειές διεκπεραιωτικής φύσεως, είναι ότι ο ερευνητής είναι αναγκασμένος να υπερβεί συνεχώς τα όρια του εαυτού του. Αυτό είναι το εγγενές χαρακτηριστικό που την κάνει πολλές φορές δυσβάσταχτη, αλλά ταυτόχρονα και βαθύτατα γοητευτική. Απ' αυτή τη σκοπιά, η έρευνα αποκτά διαστάσεις μοναστικής εμπειρίας. Με αυτό δεν αναφέρομαι στις ατέλειωτες ώρες που περνάει ο ερευνητής με μόνη συντροφιά μουτζουρωμένα χαρτιά, αλλά στη διάπλαση χαρακτήρα που τη συνοδεύει: δε βγαίνεις από αυτή ίδιος.

Στα καθ' ημάς, η εν λόγω διατριβή πραγματοποιήθηκε στο Ελληνικό Πανεπιστήμιο· η επιλογή αυτή δεν ήταν τυχαία. Ως νέος της γενιάς της κρίσης -η οποία αποδείχτηκε εκτός από οικονομική και κρίση ιδεών- έκανα τα πρώτα μου επιστημονικά βήματα σε ένα περιεργό περιβάλλον. Το Ελληνικό Πανεπιστήμιο λουιδωρούταν κατά ριπάς από σχεδόν όλες τις κατευθύνσεις. Ωστόσο, όσοι το ζούσαμε στο εσωτερικό του και ήμασταν ενεργά μέλη του γρήγορα καταλάβαμε ότι και το δικό μας Πανεπιστήμιο έχει πάρα πολλά να προσφέρει σε όποιον είναι πρόθυμος να τα δεχτεί. Το εκπαιδευτικό προσωπικό, αλλά και εμείς οι φοιτητές, πολλές φορές κληθήκαμε να κρατήσουμε χαρακτήρα και να δουλέψουμε απερίσπαστοι σε ένα περιβάλλον που μας έσπινε συνεχώς εμπόδια. Από την άλλη αισθάνομαι, παρά την οίηση που ενδεχομένως κρύβει μια τέτοια αίσθηση, ότι αυτό μας έδωσε το ασυναγώνιστο εφόδιο του να μπορούμε να κλείνουμε τα αυτιά μας στους μάντιες κακών και σε όσους ισοπέδωναν κάθε προσπάθειά μας και να συνεχίζουμε αγόγγυστα το έργο μας. Σε όλο αυτό το σχιζοφρενικό κλίμα, ήταν προσωπική μου επιλογή να παραμείνω στο Ελληνικό Πανεπιστήμιο, παίρνοντας όλο το κόστος της επιλογής μου, για να διαθέσω τη δυναμική μου -όποια κι αν ήταν, μεγάλη ή μικρή- ως νέος ερευνητής στο χώρο που με ανέθρεψε επιστημονικά. Όλοι όσοι κάναμε αυτή την επιλογή ξέρουμε το πόσο υποβαθμίστηκε -και θα συνεχίσει να υποβαθμίζεται- το έργο μας αλλά, προσωπικά, δε μετανιώνω στιγμή για την επιλογή μου. Έχοντας πλέον μια μικρή εμπειρία κοντά στο Ακαδημαϊκό επίπεδο, μπορώ να δηλώσω με βεβαιότητα ότι το Πανεπιστήμιό μας διαθέτει άξιους ανθρώπους που παρέχουν την -συχνά αξιοσημείωτη- επιστημονική τους δυναμική με ταπεινότητα, διάθεση και απεριόριστο σεβασμό στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Ως εκ τούτου, οφείλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, και κύριο επιβλέποντα αυτής της διατριβής, κο Αλέξανδρο Καρανίκα. Έχοντας πια μια μακρά συνεργασία μαζί του, ήδη από την προπτυχιακή μου διπλωματική, κατόπιν κατά την εκπόνηση του μεταπτυχιακού μου και πλέον κατά τη διδακτορική μου διατριβή, τον ευχαριστώ βαθύτατα που εκτός από την άρτια καθοδήγησή του, ήταν και πάντα πρόθυμος να ακούσει τις -συχνά αφελείς- ιδέες μου. Είμαι βαθιά ευγνώμων που κατά τη διάρκεια αυτής της έρευνας με αντιμετώπισε ως επιστημονικά ισόδυναμο,

μου επέτρεψε να αυτοσχεδιάσω, να δοκιμάσω πράγματα, να ακολουθήσω κατευθύνσεις που ίσως δεν άπτονταν πάντα των προβλημάτων που αντιμετωπίζαμε. Η οπτική του πάνω στο πώς πρέπει να γίνεται μια έρευνα και η ελευθερία που μου παρείχε να ακολουθήσω τη δική μου πορεία, από τα πρώτα χρόνια κιόλας της συνεργασίας μας, είναι αξιοθαύμαστη και θα αποτελέσει οδηγό στη ζωή μου και στη μετέπειτα σταδιοδρομία μου.

Επίσης ευχαριστώ πολύ τα μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής, κο Φώτιο Διάκονο και κο Ιωάννη Πάχο, που, πάντοτε με ενάργεια, με έφεραν σε επαφή με γόνιμες ιδέες και ενδιαφέρουσες κατευθύνσεις, καθώς και για το ότι πάντα μου παρείχαν πρόθυμα και εγκαίρως τη βοήθειά τους σε οτιδήποτε χρειάστηκε.

Πολλές ευχαριστίες και στο συνάδελφο Ιωάννη Λυρή, για την εξαιρετική συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της έρευνας. Οι ατέλειωτες συζητήσεις μας και η από κοινού ανάλυσή μας στα θέματα που πραγματεύεται η εν λόγω διατριβή αποτέλεσαν για μένα πολύτιμη βοήθεια. Του είμαι ευγνώμων για την επιμονή που έδειξε πάνω σε θέματα μαθηματικής αυστηρότητας των εννοιών και των εργαλείων που χρησιμοποιήσαμε -επιμονή την οποία πολύ αμφιβάλλω αν θα είχα δείξει από μόνος μου- και η οποία με ώθησε σε μια εντελώς καινούρια επεξεργασία του μαθηματικού υποβάθρου μου. Η ροπή του προς τη μαθηματική αυστηρότητα σε συνδυασμό με την προτίμησή μου στη φυσική διαίσθηση ήταν συστατικά που αναμφίβολα οδήγησαν σε μια αρμονική ανάπτυξη του αντικειμένου επεξεργασίας μας και τον ευχαριστώ πολύ γι' αυτό.

Πέραν του ερευνητικού κομματιού, εντός του Πανεπιστημίου, υπάρχει πάντα και το γραφειοκρατικό, στο οποίο, δυστυχώς, πάντοτε υστερούσα. Οι υπάλληλοι της Γραμματείας του τμήματος Φυσικής του ΕΚΠΑ, καθώς και της γραμματείας του Τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων ήταν πάντα υπομονετικοί και μου παρείχαν οποιαδήποτε βοήθεια χρειάστηκε, ως εκ τούτου ευχαριστώ βαθύτατα και όσους με εξυπηρέτησαν σε αυτό το επίπεδο όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου, που ανέσυρε το σθένος να στηρίζει όλη αυτή τη σταδιοδρομία.

Παναγιώτης Λυκουργιάς

Κεφάλαιο 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανόηση της δυναμικής σύνθετων κβαντικών συστημάτων είναι ζωτικής σημασίας και παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, τόσο θεωρητικό όσο και πειραματικό [1] για πολλούς τομείς της σύγχρονης φυσικής οι οποίοι εκτείνονται από την περιοχή των υπέρψυχρων ατόμων έως την αποθήκευση και τη διαχείριση της κβαντικής πληροφορίας. Το πεδίο έρευνας στην περιοχή αυτή είναι τεράστιο και περιλαμβάνει την ανάπτυξη πολλών και πολύ ισχυρών αριθμητικών τεχνικών [2],[3] αλλά σημαντικά λιγότερων αναλυτικών μεθόδων.

Η ύπαρξη ενός ελεγχόμενου περιβάλλοντος μέσω του οποίου κάποια ή κάποιες από τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τη Hamiltonian ενός κβαντικού συστήματος μεταβάλλονται χρονικά (είτε σταδιακά είτε απότομα) είναι αντικείμενο εντατικής έρευνας τα πολλά τελευταία χρόνια λόγω των τεχνολογικών εφαρμογών που μπορούν να προκύψουν. Από την πλευρά της θεωρητικής ανάλυσης αποτελεί, από την εποχή του προβλήματος Landau-Zener, ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον θέμα το οποίο συχνά εμπλέκεται με τη φυσική συστημάτων εκτός ισορροπίας.

Τα κβαντικά συστήματα που αναλύονται, συνήθως μέσω ενός μίγματος θεωρητικών και αριθμητικών τεχνικών [4], είναι συστήματα αρκετά απλά ώστε η Hamiltonian να μπορεί να διαγωνοποιηθεί αλλά τα οποία παρουσιάζουν πλούσια φυσική όπως είναι το μονοδιάστατο μοντέλο Ising ή το αντίστοιχο μοντέλο XY εντός χρονικά εξαρτώμενου εγκάρσιου πεδίου, μοντέλα τα οποία παρουσιάζουν αλλαγή φάσης με μηδενική θερμοκρασία [5], [6]. Στις περιπτώσεις αυτές, όπως και σε άλλες πιο σύνθετες, το βασικό εργαλείο μελέτης είναι οι συναρτήσεις συσχετισμού και οι πληροφορίες που παρέχουν για τη διεμπλοκή (entanglement) της βασικής κατάστασης του συστήματος, αλλά οι αναλυτικοί υπολογισμοί αναφέρονται στην στατική περίπτωση.

Ακόμη μεγαλύτερο είναι το ενδιαφέρον το οποίο παρουσιάζουν συστήματα τα οποία βρίσκονται σε επαφή με άλλο κβαντικό σύστημα το οποίο παίζει τον ρόλο του περιβάλλοντος για το πρώτο. Ο λόγος έχει, βέβαια, να κάνει με την αποσυνοχή και την απομείωση των ιδιοτήτων που φιλοδοξεί κάποιος να χρησιμοποιήσει σε οποιαδήποτε κβαντική τεχνολογική εφαρμογή. Επομένως, είναι προφανές ότι τόσο πειραματικά όσο και θεωρητικά, η κατανόηση του μηχανισμού και του ρυθμού αποσυνοχής είναι ζωτικής σημασίας. Το θέμα αυτό αναλύεται, σχεδόν αποκλειστικά,

στο πλαίσιο της εξίσωσης Lindblad η οποία βασίζεται στην απουσία φαινομένων μνήμης του περιβάλλοντος (γεγονός που αποκλείει περιβάλλοντα με βαθμούς ελευθερίας συγκρίσιμους με αυτούς του συστήματος) και στην ασθενή αλληλεπίδραση συστήματος-περιβάλλοντος. Σε λίγες περιπτώσεις [7] έχει χρησιμοποιηθεί η πιο γενική τεχνική των Feynman-Vernon [8] η οποία στηρίζεται στα ολοκληρώματα διαδρομών του Feynman.

Από αυτά που εκτέθηκαν παραπάνω είναι φανερό ότι έχει ενδιαφέρον, και όχι μόνο θεωρητικό, η ανάπτυξη τεχνικών οι οποίες θα μπορούσαν να ξεπεράσουν κάποια από τα ζητήματα που αντιμετωπίζει η μελέτη της κβαντικής δυναμικής σύνθετων συστημάτων.

Στην διατριβή που ακολουθεί εισηγούμεθα τη χρήση των ολοκληρωμάτων διαδρομών ως ένα σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση αυτή. Υπέρ της πρότασης αυτής υπάρχουν κάποια σοβαρά επιχειρήματα. Ένα από αυτά είναι ότι τα ολοκληρώματα διαδρομών είναι το προνομιακό εργαλείο για την εφαρμογή συστηματικών ημικλασικών υπολογισμών. Αυτό είναι σημαντικό για συστήματα που χαρακτηρίζονται από μη γραμμικότητες οι οποίες κάνουν αυτά τα συστήματα πολύ πιο ενδιαφέροντα αλλά δεν επιτρέπουν την άμεση διαγωνοποίηση της Hamiltonian. Η μεγάλη παράμετρος ως προς την οποία μπορεί να αναπτυχθεί μια συστηματική ημικλασική θεωρία διαταραχών μπορεί να είναι ο αριθμός των σωματιδίων του συστήματος [9]. Ένας εξίσου σημαντικός λόγος αφορά στον υπολογισμό της χρονικής εξάρτησης των συναρτήσεων συσχετισμού όταν σε αυτές περιέχονται περισσότερες από μία χρονικές στιγμές. Αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς αν αναφερθεί στην ανηγμένη μήτρα πυκνότητας η οποία είναι η ποσότητα-κλειδί για την μελέτη της δυναμικής των κβαντικών συσχετίσεων. Ο υπολογισμός της είναι από εξαιρετικά πολύπλοκος έως και αδύνατος στις περισσότερες περιπτώσεις αλλά, ακόμη και εάν είναι γνωστή, δεν επαρκεί για τον υπολογισμό συσχετίσεων της μορφής $\langle \hat{O}(t_1) \dots \hat{O}(t_n) \rangle = \text{tr}[\hat{\rho}(0) \hat{O}(t_1) \dots \hat{O}(t_n)]$. Αντίθετα, ο φορμαλισμός των ολοκληρωμάτων διαδρομών είναι κατασκευαστικά επιφορτισμένος με τον υπολογισμό συναρτήσεων συσχέτισης πολλών σημείων μέσω της συναρτησιακής γεννήτριας.

Εντούτοις και παρά τα προφανή πλεονεκτήματα, η τεχνική των ολοκληρωμάτων διαδρομών έχει ελάχιστα χρησιμοποιηθεί στη μελέτη κβαντικών συστημάτων πολλών σωματιδίων [10]. Ανάμεσα στους λόγους για τους οποίους συμβαίνει αυτό, ο πιο σημαντικός, είναι τα προβλήματα και οι ασυνέπειες [40] που βαραίνουν αυτή την περιγραφή όταν αναφέρεται σε συστήματα των οποίων η Hamiltonian εκφράζεται μέσω τελεστών δημιουργίας και καταστροφής (μποζονικών ή φερμιονικών). Σε μια τέτοια περίπτωση, η οποία είναι ο κανόνας στα συστήματα πολλών σωματιδίων, οι διαδρομές που πρέπει να ολοκληρωθούν εκφράζονται στην (υπερπλήρη) βάση των (μποζονικών ή φερμιονικών) συνοχικών καταστάσεων (coherent states). Το γεγονός αυτό οδηγεί σε ολοκληρώματα τα οποία, ακόμη και σε πολύ απλές περιπτώσεις όπως η $\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, δεν δίνουν τα σωστά αποτελέσματα (τα οποία μπορούν να υπολογιστούν, με τετριμμένο τρόπο, με άλλες μεθόδους). Η εικαζόμενη χρησιμότητα των ολοκληρωμάτων διαδρομών έχει οδηγήσει σε διάφορες [23], [24] προτάσεις οι οποίες φιλοδοξούν να προσπεράσουν τις ασυνέπειες έτσι ώστε να αποδώσουν καθαρό έναν χρήσιμο φορμαλισμό. Οι περισσότερες από αυτές μπορούν να διορ-

θώσουν τις ασυνέπειες μόνο τετριμμένων περιπτώσεων όπως η προαναφερθείσα. Η μόνη γνωστή τεχνική η οποία μπορεί να αντιμετωπίσει με επιτυχία περιπτώσεις στις οποίες παρουσιάζονται μη γραμμικότητες της μορφής $(\hat{a}^\dagger \hat{a})^n$ (σε συστήματα μποζονίων) έχει την αδυναμία της παράκαμψης του προβλήματος (της κατασκευής, δηλαδή, ολοκληρωμάτων διαδρομών σε χώρο που καλύπτεται από συνοχικές καταστάσεις) με την αναγωγή του σε χώρους και βάσεις όπου η ισχύς του φορμαλισμού είναι αποδεδειγμένη [16], [17]. Στο πρώτο μέρος της παρούσας διατριβής παρουσιάζεται μια τεχνική η οποία βασίζεται στην καλά μελετημένη και θεμελιωμένη γεωμετρική χβάντωση [47], [48], [50] μέσω της οποίας επιχειρείται η, από πρώτες αρχές, θεμελίωση της ολοκλήρωσης τροχιών οι οποίες ορίζονται σε χώρους που καλύπτονται από συνοχικές καταστάσεις μποζονίων και spin [64]. Συζητείται, επίσης, η αντίστοιχη κατασκευή για τα φερμιονικά συστήματα μέσω της τεχνικής Faddeev-Jackiw [25], [27].

Στο δεύτερο τμήμα της διατριβής ο φορμαλισμός των ολοκληρωμάτων διαδρομών με όρους συνοχικών καταστάσεων, εφαρμόζεται σε ένα, μη τετριμμένο, σύστημα το οποίο μπορεί να αναλυθεί και με διαφορετικές τεχνικές: το μονοδιάστατο ΧΥ μοντέλο με εγκάρσιο πεδίο. Σε πρώτο επίπεδο το σύστημα αντιμετωπίζεται ως πλήρως απομονωμένο και υπολογίζεται η χρονική εξάρτηση συναρτήσεων συσχέτισης στη βασική κατάσταση. Παρότι τέτοια αποτελέσματα ήταν γνωστά από παλιά [30] τα χρησιμοποιούμε ως ένα κρίσιμο τεστ για έναν φορμαλισμό ο οποίος έχει εμφανίσει προβλήματα ακόμα και στο επίπεδο του αρμονικού ταλαντωτή. Στη συνέχεια, μελετάμε τη χρονική εξάρτηση της λεγόμενης γεωμετρικής εντροπίας της βασικής κατάστασης. Η εντροπία αυτή είναι η εντροπία von Neumann η οποία παράγεται μετά την αποκοπή ενός τμήματος του μονοδιάστατου πλέγματος, επί του οποίου ορίζεται το σύστημα για το οποίο συζητάμε. Η χρονική της εξάρτηση έχει μελετηθεί μόνο αριθμητικά. Υπό την έννοια αυτή, το αποτέλεσμα των υπολογισμών μας μπορεί να θεωρηθεί πρωτότυπο. Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση στην οποία το σύστημα είναι σε επαφή με ελεγχόμενο εξωτερικό περιβάλλον μέσω του οποίου το εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο αλλάζει με τον χρόνο. Το πρόβλημα αυτό, στο σκέλος του που αφορά στην επίδραση αυτής της μεταβολής στον εναγκαλισμό της βασικής κατάστασης, έχει μελετηθεί είτε αριθμητικά [4] είτε αναλυτικά στη γειτονιά του κρίσιμου σημείου [32]. Ο φορμαλισμός που παρουσιάζουμε [65] έχει την δυνατότητα να εξετάσει την χρονική εξάρτηση συναρτήσεων συσχέτισης παρουσία μεταβαλλόμενου πεδίου. Πέρα από τις τεχνικές λεπτομέρειες, το βασικό στοιχείο σε αυτό το τμήμα της διατριβής είναι το γεγονός ότι η χρονική εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου οδηγεί το σύστημα εκτός ισορροπίας. Για την μελέτη του, συνδέουμε την τεχνική μας με τον φορμαλισμό Keldysh-Schwinger έτσι ώστε να περιγράψουμε συσχετίσεις εκτός ισορροπίας.

Η διατριβή κλείνει με την πρόταση ενός μοντέλου το οποίο στηρίζεται στην ιδέα των μη τοπικών βαθμών ελευθερίας και το οποίο θα μπορούσε να θεωρηθεί ως παραλλαγή της αλυσίδας του Kitaev [62]. Το ενδιαφέρον της μελέτης τέτοιων συστημάτων τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν την ύπαρξη μη τοπικών βαθμών ελευθερίας, έγκειται στη δυνατότητα αποθήκευσης και διαχείρισης πληροφορίας η οποία μπορεί να είναι προστατευμένη απέναντι σε τοπικές διαταραχές.

Μέρος Ι

ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΟΥ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ
ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ

Κεφάλαιο 3

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ

Ένα πολύ μεγάλο μέρος της παρούσας διατριβής αφορά τη συνεπή τυποποίηση των ολοκληρωμάτων διαδρομών και εφαρμογές αυτών σε φυσικά προβλήματα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στην ιδέα των ολοκληρωμάτων διαδρομών δίνοντας έμφαση στη χρησιμότητά τους και προσπαθώντας να εξηγήσουμε όσο καλύτερα γίνεται το σκέπτικο σύμφωνα με το οποίο εμφανίστηκαν και χρησιμοποιούνται στη φυσική. Τονίζουμε ωστόσο από τώρα ότι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο συνεπής ορισμός τους σε πάρα πολλές περιπτώσεις είναι ακραία μη τετριμμένος.

3.1 Σύνδεση με την κλασική μηχανική

Ας θυμηθούμε την ιδέα που βρίσκεται στον πυρήνα της κβαντομηχανικής και την κάνει μη κλασική θεωρία: το αντικείμενο ενδιαφέροντος είναι η κυματοσυνάρτηση (ή το κυματόνυσμα). Η κυματοσυνάρτηση αποτελεί την “κατάσταση” ενός κβαντικού συστήματος, με την έννοια ότι είναι η οντότητα εκείνη από την οποία μπορούμε κατ’ αρχήν να λάβουμε οποιαδήποτε πληροφορία για το σύστημα. Αξίζει να αντιπαραβάλλουμε αυτή την εικόνα με την εικόνα των κλασικών θεωριών φυσικής: εκεί η θεμελιώδης οντότητα είναι η τροχιά στο χώρο των φάσεων, από την άποψη ότι αυτή είναι η ποσότητα εκ της οποίας μπορούμε κατ’ αρχήν να μάθουμε τα πάντα για το σύστημα.

Προφανώς σε κάθε θεωρία φυσικής θεμελιώδης στόχος είναι η εύρεση της οντότητας που αποτελεί την “κατάσταση” του συστήματος. Στην κλασική μηχανική αυτή είναι η τροχιά και προκύπτει από το Νόμο του Νεύτωνα, μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο. Στην κβαντομηχανική αυτή είναι η κυματοσυνάρτηση και προκύπτει από την εξίσωση Schrödinger, μια διαφορική ε-

ξίσωση πρώτης τάξης ως προς το χρόνο.

Το ότι η εξίσωση Schrödinger είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο σημαίνει ότι η κατάσταση του συστήματος κάποια χρονική στιγμή προκύπτει από την κατάσταση του συστήματος απειροστό χρόνο νωρίτερα. Επομένως κεντρική σημασία για την κβαντική μηχανική φαίνεται να έχει ο γενήτορας των μεταθέσεων στο χρόνο, ο οποίος είναι ο τελεστής που ονομάζεται Hamiltonian. Με άλλα λόγια, η κβαντική μηχανική ανάγεται στη μελέτη του τελεστή Hamiltonian, δηλαδή η εξίσωση Schrödinger συνδέεται με την εξίσωση ιδιοτιμών της Hamiltonian.

Οποιοσδήποτε έχει έστω και ελάχιστη εξοικείωση με την κβαντική μηχανική ή με τις μεθόδους επίλυσης εξισώσεων ιδιοτιμών, ξέρει πολύ καλά ότι η επίλυση της εξίσωσης Schrödinger, εν γένει, μόνο τετριμμένη δεν είναι. Για την ακρίβεια λιγοστά είναι τα συστήματα η εξίσωση Schrödinger των οποίων μπορεί να λυθεί ακριβώς, ενώ ακόμη και το πολύ χρήσιμο εργαλείο της θεωρίας διαταραχών δεν είναι πάντοτε πρακτικό ή δε δίνει σαφείς απαντήσεις. Είναι, δε, γνωστό ότι οι υπολογισμοί που εμπλέκουν τελεστές παρουσιάζουν συχνά δυσκολίες λόγω του ότι για αυτά τα αντικείμενα η διάταξη είναι πάρα πολύ σημαντική: ένα γινόμενο τελεστών, εν γένει, αλλάζει τιμή αλλάζοντας τη διάταξη των τελεστών που το απαρτίζουν. Ως εκ τούτου, είναι ξεκάθαρο ότι βολεύει πολύ περισσότερο να περιγράψουμε ένα σύστημα χρησιμοποιώντας συναρτήσεις παρά τελεστές. Επομένως είναι εύλογο να προσπαθήσει κανείς -αν γίνεται- να “κλασικοποιήσει” ένα κβαντικό σύστημα, με κάποιο συνεπή τρόπο, προκειμένου να μελετά συναρτήσεις και όχι τελεστές. Από αυτή τη σκοπιά θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τα κίνητρα της εισαγωγής των ολοκληρωμάτων διαδρομών στη φυσική.

Όπως είπαμε, η Hamiltonian είναι η οντότητα εκείνη που γεννά μεταθέσεις στο χρόνο. Να σημειωθεί ότι αυτό ισχύει τόσο για την κβαντική μηχανική όσο και για την κλασική φυσική, όπως είναι γνωστό από την αναλυτική μηχανική. Στην κβαντική μηχανική η Hamiltonian είναι η θεμελιώδης ποσότητα. Από την άλλη, στην κλασική μηχανική η Hamiltonian δεν είναι θεμελιώδης, προκύπτει από τη Lagrangian. Ο λόγος που η Lagrangian είναι πράγματι πιο θεμελιώδης μπορεί να φανεί ξεκάθαρα όταν περάσουμε στην ειδική σχετικότητα (που είναι πληρέστερη κλασική θεωρία από τη Νευτώνεια φυσική): η Lagrangian είναι ένα βαθμωτό Lorentz, ενώ η Hamiltonian είναι η χρονική συντεταγμένη ενός τετρανύσματος! Η μη αναλλοιώτητα της Hamiltonian μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναφοράς είναι προφανής: οι χρονικές μεταβολές εν γένει διαφέρουν μεταξύ τέτοιων συστημάτων, επομένως διαφέρουν και οι γενήτορες των χρονικών μεταθέσεων. Οπότε κλασικά, η Hamiltonian δεν είναι θεμελιώδης. Αυτή η μη αναλλοιώτητα δεν είναι καθόλου προφανής στην αρχική περιγραφή της κβαντικής μηχανικής.

Από την αναλυτική μηχανική ξέρουμε ότι η Lagrangian κάποια χρονική στιγμή είναι συνάρτηση της θέσης και της θέσης λίγο αργότερα (συνήθως γράφεται ως συνάρτηση της θέσης και της ταχύτητας, το οποίο προκύπτει πράγματι για απειροστή χρονική διαφορά). Η δε Hamiltonian κάποια χρονική στιγμή είναι συνάρτηση της θέσης και της ορμής την ίδια εκείνη χρονική στιγμή. Οι δυο ποσότητες συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού Legendre. Το πρόβλημα στην απευθείας αναγωγή αυτών των ιδεών στο κβαντικό επίπεδο είναι ότι ο μετασχηματισμός Legendre, για ένα κβαντικό σύστημα, δεν είναι καλά ορισμένος: αν μη τι άλλο απαιτεί την ύπαρξη τροχιάς, κάτι που στην κβαντομηχανική δεν υπάρχει. Αυτό διότι πλέον οι κανονι-

κές μεταβλητές q , p είναι τελεστές \hat{q} , \hat{p} που δε μετατίθενται.

Μια περιγραφή αυτών των ιδεών είχε δοθεί από το Dirac -αργότερα ο Feynman εξέφρασε μαθηματικώς αυτές τις ιδέες με τρόπο ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για υπολογισμούς [36], [37], [43]: από τη στιγμή που κβαντομηχανικά η θεμελιώδης ποσότητα είναι η Hamiltonian, όλη η κβαντική μηχανική χτίζεται ανάλογα με τη θεωρία της κλασικής μηχανικής που αφορά τη Hamiltonian. Εφόσον κλασικά υπάρχει σύνδεση μεταξύ Hamiltonian και Lagrangian -μέσω του μετασχηματισμού Legendre- εύλογα προκύπτει η απορία του πώς θα μεταφραζόταν κβαντικά η κλασική θεωρία που αφορά τη Lagrangian. Όμως οι εξισώσεις που αφορούν τη Lagrangian περιέχουν μερικές παραγώγους ως προς τις συντεταγμένες και τις ταχύτητες, που κβαντικά δεν έχουν νόημα, μιας και αυτές οι ποσότητες είναι τελεστές. Επομένως πρέπει να αξιοποιήσουμε τις ιδέες της κλασικής θεωρίας της Lagrangian, όχι τις εξισώσεις της. Επισημαίνουμε εδώ ότι όταν αναφερόμαστε σε κβαντική έκφραση της θεωρίας της Hamiltonian δεν αναφερόμαστε στις εξισώσεις Hamilton αφού περιέχουν κι εκείνες μερικές παραγώγους ως προς μεγέθη που κβαντικά είναι τελεστές. Ωστόσο, αξιοποιώντας την αγκύλη Poisson, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφτούν σε μια πιο γενικευμένη μορφή που επιτρέπει την α-ναγωγή τους στο κβαντικό επίπεδο παραμορφώνοντας την αγκύλη Poisson σε μια άλλη αγκύλη, τη λεγόμενη Moyal. Αυτό επιτυγχάνεται διότι η ιδέα των κανονικών συντεταγμένων και ορμών έχει ένα πολύ απλό κβαντικό ανάλογο (η αγκύλη Poisson μιας συντεταγμένης και της συζυγούς της ορμής είναι ίση με 1, ο μεταθέτης μιας συντεταγμένης και της συζυγούς της ορμής είναι ίσος με $i\hbar$). Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι η κλασική θεωρία της Lagrangian επιτρέπει να εκφράσουμε όλες τις εξισώσεις κίνησης εντοπίζοντας τα στάσιμα σημεία της ποσότητας που ονομάζεται δράση (το ολοκλήρωμα της Lagrangian στο χρόνο).

Αυτές είναι οι βασικές θεωρητικές παρατηρήσεις για να κατανοήσουμε τα κίνητρα εισαγωγής μιας νέας ιδέας -ενός νέου θεωρητικού εργαλείου- στη συμβατική κβαντική μηχανική: ψάχνουμε να βρούμε πώς μπορούν να μεταφραστούν κάποια από όσα ξέρουμε για την κλασική δράση στο κβαντικό επίπεδο -όσα είναι εφικτό. Ας θυμηθούμε τη λογική της αναλυτικής μηχανικής: στην απλούστερη περίπτωση ένα σωματίδιο ξεκινά από μια αρχική θέση, καταλήγει σε μια τελική και αναζητούμε την τροχιά που ακολουθήσε στο χώρο των φάσεων. Το σπουδαίο αποτέλεσμα της αναλυτικής μηχανικής είναι ότι οι τροχιές που επιτρέπονται κλασικά καθιστούν το συναρτησοειδές της δράσης στάσιμο. Επίσης υπάρχει κι ένας σύνδεσμος σε αυτές τις τροχιές: η ενέργεια του συστήματος πρέπει να διατηρείται. Αυτά τα δύο γεγονότα είναι εμφανές ότι δίνουν μια ευκρινέστατη εικόνα για τις ακριβείς θέσεις και ορμές και τη δυναμική των κλασικών σωματιδίων ανά πάσα στιγμή.

Αντιθέτως, τα κβαντικά σωματίδια είναι πολύ πιο περίπλοκα, είναι αδύνατο να μελετηθούν υπό όρους τροχιών ή ενεργειών, εν γένει. Αυτό αιχμαλωτίζεται κομψότατα στην Αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg: η σχέση αβεβαιότητας θέσης-ορμής αποκαθλώνει ανεπανόρθωτα την ιδέα της τροχιάς, θεμελιώδη στην κλασική μηχανική -όχι απλά δεν υπάρχουν "κβαντικά επιτρεπτές τροχιές", δεν υπάρχουν καν τροχιές! Η δε σχέση αβεβαιότητας χρόνου-ενέργειας επιτρέπει την παραβίαση της διατήρησης της ενέργειας σε ένα συγκεκριμένο χρονικό εύρος. Ακραιφνής εκδήλωση της κλασικά απαγορευμένης συμπεριφοράς των κβαντικών σωματιδίων είναι το φαινόμενο σύραγγας: ένα σωματίδιο μπορεί να υπερβεί ένα

φράγμα δυναμικού υψηλότερο από την ίδια του την ενέργεια!

Ωστόσο, μπορούμε να εντοπίσουμε στην κλασική αναλυτική μηχανική το σπόρο μιας ιδιαίτερα ενδιαφέρουσας ιδέας: η διάδοση ενός κλασικού σωματιδίου από ένα σημείο του χώρου των φάσεων -από μια κλασική κατάσταση- σε ένα άλλο ελέγχεται από τη δράση. Η κβαντική μετάφραση αυτής της δήλωσης έχει ως εξής: το κβαντικό πλάτος μετάβασης από ένα κυματόνισμα -από μια κβαντική κατάσταση- σε ένα άλλο ελέγχεται από τη δράση. Η σημασία της λέξης "ελέγχεται" φυσικά διαφέρει μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Στην κλασική περίπτωση όπως επισημάναμε συμμετέχει μόνο η κλασικά επιτρεπτή διαδρομή. Στην κβαντική περίπτωση, εφόσον δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη κβαντικά επιτρεπτή διαδρομή, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι συνεισφέρουν όλες οι δυνατές διαδρομές -ζυγιζόμενες με κάποιον παράγοντα βάρους φυσικά. Αυτό το άθροισμα πάνω σε όλες τις διαδρομές αποτελεί την πρωτόλεια ιδέα του ολοκληρώματος διαδρομών. Επισημάνουμε ότι και εδώ η κλασικά επιτρεπτή διαδρομή έχει κάποια σημασία: εφόσον η κλασική φυσική αναχτάται στο όριο $\hbar \rightarrow 0$ σε αυτό το όριο θα συνεισφέρει μόνο η κλασική τροχιά. Επίσης σημειώνουμε ότι με αυτό το σκεπτικό δικαιολογείται και το φαινόμενο σύραγγας: εφόσον στο πλάτος μετάβασης συνεισφέρουν όλες οι διαδρομές και όχι μόνο η κλασική, δεν προκαλεί έκπληξη το ότι βρίσκουμε ένα αποτέλεσμα κλασικά απαγορευμένο.

Αυτό είναι το σκεπτικό που, κατά μία έννοια, δικαιολογεί την επινόηση του ολοκληρώματος διαδρομών και υποδεικνύει και το δρόμο για το μαθηματικό φορμαλισμό του. Όπως θα πρέπει να έχει γίνει κατανοητό από την παραπάνω ανάλυση, το ολοκλήρωμα διαδρομών είναι μάλλον η πιο ακραιφνής εκδήλωση κλασικών ιδεών στην κβαντική μηχανική. Θα συνεχίσουμε με τη θεμελίωση του, προσπαθώντας να εκφράσουμε τα προαναφερθέντα σε αυστηρά μαθηματική γλώσσα και να δείξουμε ότι αυτή η σχέση περί αθροίσματος πάνω σε όλες τις διαδρομές είναι όντως κάτι παραπάνω από μια εύλογη αναλογία που προκύπτει από την κβαντική μετάφραση της κλασικής φυσικής.

3.2 Μαθηματική έκφραση του ολοκληρώματος διαδρομών

Η ανάπτυξη των παραπάνω ιδεών μπορεί να βρεθεί σε πάρα πολλά αξιόλογα βιβλία [12], [13], [29], [33], [46], [52] ενώ η βιβλιογραφία είναι πλούσια και στην αντιμετώπιση συγκεκριμένων φυσικών προβλημάτων, στην ανάπτυξη μεθόδων διαχείρισης των υπολογισμών που υπεισέρχονται σ' αυτά καθώς και στη σύνδεση με διάφορους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής. Σε αυτή την εργασία δε θα επιχειρήσουμε να καταγράψουμε όλο το απόθεμα γνώσης πάνω στο θέμα. Ωστόσο θα παρουσιάσουμε το μαθηματικό φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομών, ώστε να γίνουν κατανοητά τα προβλήματα και οι μέθοδοι επίλυσης που επεξεργαζόμαστε στη συνέχεια της διατριβής.

Η εμβληματική ερώτηση όταν ασχολούμαστε με κβαντική μηχανική αφορά το ποια είναι η πιθανότητα να λάβουμε μια συγκεκριμένη τελική κατάσταση αν ξεκινάμε από μια αρχική και παρέλθει κάποιο χρονικό διάστημα. Για λόγους απλότητας

3.2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ¹⁹

θα θεωρήσουμε ότι ο χώρος είναι μονοδιάστατος. Η επέκταση σε περισσότερες διαστάσεις -εφόσον δουλεύουμε με μη καμπυλόγραμμες συντεταγμένες- είναι προφανής. Επομένως αυτό που μας αφορά είναι η ποσότητα

$$\langle x_b(t_b)|x_a(t_a)\rangle = \langle x_b|\hat{U}(t_b, t_a)|x_a\rangle, \quad t_a < t_b, \quad (3.1)$$

όπου $\hat{U}(t_b, t_a)$ είναι ο τελεστής χρονικής εξέλιξης. Η ανισότητα μεταξύ των δύο χρόνων υποδεικνύει ότι το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στην αιτιακή χρονική εξέλιξη (καθυστερημένη). Ο δρόμος προς τη μαθηματική έκφραση του ολοκληρώματος διαδρομών ξεκινά με την παρατήρηση ότι ο νόμος της χρονικής εξέλιξης οφείλει να είναι συνθετικός: με αυτό εννοούμε ότι ο τελεστής χρονικής εξέλιξης από μια αρχική στιγμή σε μια τελική δίνεται από το γινόμενο ενός τέτοιου τελεστή μεταξύ της αρχικής στιγμής και μιας ενδιάμεσης και ενός ακόμη τέτοιου τελεστή μεταξύ αυτής της ενδιάμεσης και της τελικής, ήτοι $\hat{U}(t_b, t_a) = \hat{U}(t_b, t)\hat{U}(t, t_a)$. Αυτή η αποσύνθεση μπορεί να γίνει φυσικά όσες φορές θέλουμε, μετατρέποντας τον τελεστή σε ένα γινόμενο τελεστών μεταξύ διαφόρων χρονικών στιγμών. Μπορούμε να επιλέξουμε τις χρονικές διαφορές μεταξύ των δυο χρονικών στιγμών κάθε τελεστή να είναι ίσες για όλους, δηλαδή επιλέγουμε ένα χρονικό φετάρισμα όπου κάθε φέτα έχει πάχος $\epsilon = \frac{t_b - t_a}{N+1}$ όπου $N + 1$ είναι ο αριθμός των φετών, δηλαδή ο αριθμός των τελεστών το γινόμενο των οποίων μας δίνει τον αρχικό τελεστή. Τότε:

$$\langle x_b(t_b)|x_a(t_a)\rangle = \langle x_b|\hat{U}(t_b, t_N)\dots\hat{U}(t_n, t_{n-1})\dots\hat{U}(t_1, t_a)|x_a\rangle, \quad t_a < t_b. \quad (3.2)$$

Εν συνεχεία εισάγουμε ανάμεσα σε κάθε ζεύγος τελεστών την ανάλυση της ταυτότητας συναρτήσε των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή της θέσης -όπως θα δούμε οι βάσεις που θα μας απασχολήσουν μπορούν να αποδώσουν μια αντίστοιχη ανάλυση της ταυτότητας:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| = \hat{I}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Ο δείκτης n απλώς αριθμεί τις ταυτότητες αναλόγως του μεταξύ ποιων φετών εισήχθησαν. Επομένως, τώρα το πλάτος μετατράπηκε σε ένα γινόμενο ολοκληρωμάτων:

$$\langle x_b(t_b)|x_a(t_a)\rangle = \prod_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n|\hat{U}(t_n, t_{n-1})|x_{n-1}\rangle, \quad (3.4)$$

όπου $x_b = x_{N+1}$, $t_b = t_{N+1}$, $x_a = x_0$, $t_a = t_0$, ενώ σύμφωνα με την εξίσωση Schrödinger $\hat{U}(t_n, t_{n-1}) = e^{-i\epsilon\hat{H}(t_n)/\hbar}$.

Ο τελεστής Hamiltonian είναι το άθροισμα του τελεστή κινητικής και του τελεστή δυναμικής ενέργειας. Εχμεταλλευόμενοι τον τύπο Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{-i\epsilon(\hat{T}+\hat{V})/\hbar} = e^{-i\epsilon\hat{V}/\hbar}e^{-i\epsilon\hat{T}/\hbar}e^{-i\epsilon^2\hat{X}/\hbar^2}, \quad \hat{X} = \frac{i}{2}[\hat{V}, \hat{T}] + \dots, \quad (3.5)$$

όπου παραλείψαμε στην τελευταία έκφραση όρους ανάλογους του ϵ , και αν στα παραπάνω κρατήσουμε μόνο όρους το πολύ μέχρι τάξης ϵ , μπορούμε να δούμε ότι με την εισαγωγή άλλης μιας ταυτότητας προκύπτει

$$\langle x_n | e^{-i\epsilon\hat{H}(t_n)/\hbar} | x_{n-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x_n | e^{-i\epsilon\hat{V}(t_n)/\hbar} | x \rangle \langle x | e^{-i\epsilon\hat{T}(t_n)/\hbar} | x_{n-1} \rangle. \quad (3.6)$$

Στο δεύτερο μέλος αυτής εισάγουμε και άλλη μια ταυτότητα, γραμμένη συναρτήσει των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή της ορμής αυτή τη φορά, οπότε γίνεται:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x_n | e^{-i\epsilon\hat{V}(t_n)/\hbar} | x \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{ip_n(x-x_{n-1})} e^{-i\epsilon T(p_n, t_n)/\hbar} \quad (3.7)$$

Επίσης για δυναμικά που εξαρτώνται μόνο από τον τελεστή θέσης

$$\langle x_n | e^{-i\epsilon\hat{V}(t_n)/\hbar} | x \rangle = \delta(x_n - x) e^{-i\epsilon V(x_n, t_n)/\hbar}, \quad (3.8)$$

οπότε

$$\langle x_n | e^{-i\epsilon\hat{H}(t_n)/\hbar} | x_{n-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{ip_n(x_n - x_{n-1}) - i\epsilon(T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n))/\hbar}. \quad (3.9)$$

Εισάγοντας αυτό το αποτέλεσμα στη (3.4), ανακτούμε τον τύπο του ολοκληρώματος διαδρομών του Feynman

$$\langle x_b(t_b) | x_a(t_a) \rangle = \prod_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} (\sum_{n=1}^{N+1} p_n(x_n - x_{n-1}) - \epsilon H(p_n, x_n, t_n))}. \quad (3.10)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει πάντα ένα ολοκλήρωμα περισσότερο ως προς τις ορμές απ' ό,τι ως προς τις θέσεις. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλουν οι θέσεις την αρχική και την τελική χρονική στιγμή να είναι συγκεκριμένες. Έτσι, ολοκληρώνονται μόνο οι ενδιάμεσες θέσεις. Την ίδια στιγμή, οι ταυτότητες ορμής εισάγονται ανάμεσα στις φέτες όπως φαίνεται από την παραπάνω ανάλυση, οπότε καθεμιά απ' αυτές αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος γειτονικών φετών, άρα υπάρχει μία λιγότερη μεταβλητή ορμής σε σχέση με τις θέσεις. Οπότε, αφού υπάρχουν δύο θέσεις που δεν ολοκληρώνονται, τελικά υπάρχει ένα ολοκλήρωμα παραπάνω ως προς τις ορμές από ό,τι ως προς τις θέσεις.

Μένει να διακιολογήσουμε το γιατί αγνοήθηκαν οι όροι που είναι ανάλογοι του ϵ^2 . Ο λόγος είναι ότι ενδιαφερόμαστε για το όριο των άπειρων φετών, δηλαδή για το όριο $\epsilon \rightarrow 0$. Σε αυτό το όριο μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον τύπο του Trotter:

$$e^{-i(t_b - t_a)\hat{H}/\hbar} = \lim_{N \rightarrow \infty} (e^{-i\epsilon\hat{V}/\hbar} e^{-i\epsilon\hat{T}/\hbar})^{N+1}. \quad (3.11)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι αν στο αριστερό μέλος της (3.11) φετάρουμε το χρόνο και χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Baker-Campbell-Hausdorff, τότε στο όριο $N \rightarrow \infty$

3.2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ²¹

ο όρος που είναι ανάλογος του ϵ^2 δε θα συνεισφέρει. Να σημειώσουμε ότι οι πραγματικές μαθηματικές συνθήκες που διασφαλίζουν την εγκυρότητα αυτού του επιχειρήματος είναι εξαιρετικά τεχνικές για να αναλυθούν εδώ. Αρκούμεστε στο να αναφέρουμε ότι ο τύπος του Trotter ισχύει για τελεστές που είναι κάτω φραγμένοι, ωστόσο ακόμη κι όταν είναι έγκυρος δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί πάντα για να αποδώσει τη διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών (στη συνέχεια θα αναφερόμαστε συχνά στη διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών και, αν δε διευκρινίζουμε διαφορετικά, θα εννοούμε τον τύπο (3.10) που προκύπτει από τη διαδικασία φεταρίσματος του χρόνου όπως αυτή περιγράφηκε παραπάνω). Αυτό εκδηλώνεται ακόμη και σε σχετικά απλά φυσικά συστήματα που παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, για το δυναμικό Coulomb έχει αποδειχτεί ότι τύπος του Trotter είναι έγκυρος, ωστόσο η διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών αποκλίνει ακόμη και στην περίπτωση των μόλις δύο φετών. Σ' αυτή την περίπτωση έχουν βρεθεί μηχανισμοί ανάκτησης κάποιου άλλου αντίστοιχου τύπου. Σε αυτή τη διατριβή θα ασχοληθούμε μόνο με περιπτώσεις συστημάτων όπου η διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών προκύπτει χωρίς προβλήματα ακριβώς όπως περιγράφηκε παραπάνω και δίνεται από τον τύπο (3.10).

Τώρα, είναι προφανές ότι στο όριο όπου $\epsilon \rightarrow 0$ ανατάμε το συνεχές όριο. Οπότε μπορούμε να γράψουμε τη συνεχή εκδοχή του ολοκληρώματος διαδρομών

$$\langle x_b(t_b) | x_a(t_a) \rangle = \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}x \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (p(t)\dot{x}(t) - H(p(t), x(t), t))}. \quad (3.12)$$

Το σύμβολο \mathcal{D} στις ολοκληρώσεις χρησιμοποιείται για έναν σύντομο τρόπο γραφής του μέτρου ολοκλήρωσης στο συνεχές όριο. Η σημασία του είναι προφανής: υποδηλώνει ολοκλήρωση των μεταβλητών που αντιστοιχούν σε όλες τις χρονικές στιγμές εντός του χρονικού διαστήματος που μας ενδιαφέρει -αφού είμαστε στο συνεχές- πάνω σε όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει καθεμιά απ' αυτές.

Τώρα πώς μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα; Παρατηρούμε ότι αυτό το ολοκλήρωμα που έχει εμφανιστεί μπορεί να κατανοηθεί ως το ολοκλήρωμα πάνω σε όλες τις δυνατές ιστορικές εξελίξεις πάνω στις οποίες μπορεί το σύστημα να διαδοθεί στο χρόνο. Το δε εκθετικό θυμίζει τον παράγοντα βάρους της στατιστικής μηχανικής, μόνο που ο εκθέτης είναι φανταστικός. Αυτό σημαίνει ότι στον κβαντικό κόσμο κάθε ιστορική εξέλιξη δε ζυγίζεται με μια πιθανότητα, αλλά με μια φάση! Αντιμετωπίζοντας λοιπόν το ολοκλήρωμα διαδρομών ως ένα άθροισμα πάνω σε ιστορικές εξελίξεις, το πλάτος μετάβασης δεν είναι τίποτα άλλο παρά το άθροισμα αυτών των φάσεων πάνω σε όλες τις πιθανές ιστορικές εξελίξεις που οδηγούν το σύστημα από την αρχική κατάσταση στην τελική. Στη στατιστική μηχανική οι ποσότητες ενδιαφέροντος προκύπτουν από το άθροισμα των στατιστικών βαρών-πιθανοτήτων πάνω σε όλες τις δυνατές διατάξεις. Στην κβαντική μηχανική το βάρος αυτό μετατρέπεται σε φάση και οι διατάξεις σε ιστορικές πορείες. Παρατηρήστε πόσο φυσιολογικό είναι το άθροισμα πάνω σε ιστορικές πορείες για ένα κβαντικό σύστημα. Κβαντικά, εαν δεν πραγματοποιηθεί μέτρηση δεν υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε τίποτα για το σύστημα. Εδώ έχουμε την αρχική και την τελική κατάσταση να έχουν μετρηθεί, αλλά ενδιάμεσα δεν έχει γίνει καμία μέτρηση.

Επομένως, το σύστημα θα μπορούσε να έχει κάνει τη μετάβαση με οποιοδήποτε τρόπο -με κάποιον παράγοντα φάσης να συνοδεύει κάθε τέτοιο τρόπο.

Μια φυσική ποσότητα με την οποία θα ασχοληθούμε πολύ σ' αυτή τη διατριβή είναι η λεγόμενη συνάρτηση επιμερισμού. Αυτή δίνεται από τον τύπο $Z = \text{tr}(\hat{T}e^{-i \int_{t_a}^{t_b} dt \hat{H}/\hbar})$, όπου \hat{T} είναι ο τελεστής χρονικής διάταξης. Εναλλακτικά, μπορούμε να την υπολογίσουμε στην τοπική βάση, θέτοντας $x_b = x_a$ και ολοκληρώνοντας και ως προς x_a . Τότε είναι προφανές ότι

$$Z = \int_{pbc} \mathcal{D}x \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (p(t)\dot{x}(t) - H(p(t), x(t), t))} \quad (3.13)$$

Πέραν της χρησιμότητας αυτού του τύπου για υπολογισμούς, μπορούμε να τον αξιολογήσουμε για να κάνουμε μια καλύτερη σύνδεση της κβαντικής με την κλασική μηχανική. Πράγματι, η ιδέα της "διαδρομής" όπως περιγράφηκε παραπάνω μοιάζει κάπως αφύσικη, μιας και στην κβαντική μηχανική δεν υπάρχουν τροχιές. Αντίθετα, εδώ η σύνδεση κλασικής και κβαντικής φυσικής εκδηλώνεται ξεκάθαρα αν θυμηθούμε και τη συνάρτηση επιμερισμού ενός κλασικού συστήματος. Κλασικά, κάθε στοιχείο όγκου $\frac{dx dp}{h}$ του χώρου των φάσεων καταλαμβάνεται με πιθανότητα $e^{-E/kT}$. Η παραπάνω έκφραση της συνάρτησης επιμερισμού μας δείχνει την κβαντική επέκταση αυτού: κάθε στοιχείο όγκου στο "φασικό χώρο του ολοκληρώματος διαδρομών" έρχεται με ένα εκθετικό, μόνο που ο εκθέτης είναι φανταστικός, οπότε δεν έχουμε πιθανότητα αλλά φάση. Πράγματι, αυτή είναι μια πιο φυσική ερμηνεία του ολοκληρώματος διαδρομών μιας και δεν γίνεται αναφορά σε τροχιά, η οποία είναι έννοια χωρίς περιεχόμενο στον κβαντικό κόσμο.

Τώρα, παρατηρούμε το εξής: είναι $T = \frac{p^2}{2m}$, οπότε τα ολοκληρώματα ως προς τις ορμές στη διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών μπορούν να υπολογιστούν εύκολα -είναι όλα Gaussian- αν το δυναμικό δεν εξαρτάται από την ορμή. Αν γίνει αυτό, και περάσουμε εκ νέου στο συνεχές, καταλήγουμε στον τύπο

$$\langle x_b(t_b) | e^{-i(t_b-t_a)\hat{H}/\hbar} | x_a(t_a) \rangle = \mathcal{N} \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x(t), t))} \quad (3.14)$$

Παρατηρήστε ότι στο εκθετικό ολοκληρώνεται η Lagrangian, δηλαδή στο εκθετικό βρίσκεται το συναρτησοειδές της δράσης. Σημειώνουμε ότι απορροφήσαμε τις σταθερές που προέκυψαν από τις ολοκληρώσεις των ορμών στον παράγοντα κανονικοποίησης \mathcal{N} . Είναι γεγονός ότι αυτός ο παράγοντας, λόγω των ϵ στον παρονομαστή του, αποκλίνει πολύ έντονα. Ωστόσο, ένας ενδελεχής υπολογισμός μπορεί να δείξει ότι οι συνακόλουθες ολοκληρώσεις ως προς τις θέσεις θα εξουδετερώσουν όλα τα προβλήματα αποδίδοντας ένα αποτέλεσμα που δεν αποκλίνει. Το σημαντικό για τη μελέτη μας είναι να θυμόμαστε ότι αυτός ο παράγοντας προέκυψε από ολοκλήρωση των ορμών. Αυτό σημαίνει ότι είναι παγκόσμιος, δηλαδή έχει να κάνει μόνο με το συντελεστή που συνοδεύει τις ορμές, οπότε δεν εξαρτάται από το δυναμικό! Αυτό είναι συγκλονιστικής σημασίας για να καταφέρουμε να κάνουμε υπολογισμούς στο συνεχές όπως θα δούμε.

3.3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΠΛΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ23

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με κάποιες επισημάνσεις σχετικά με την εικόνα της κβαντικής μηχανικής που λαμβάνει κανείς από το ολοκλήρωμα διαδρομών. Ας θυμηθούμε τη συμβατική κβαντομηχανική. Είναι προφανές ότι το πλάτος πιθανότητας μπορεί να προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης Schrödinger. Πράγματι, όταν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την κατάσταση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο με την αρχική κατάσταση. Επομένως, κατ' αρχήν το ολοκλήρωμα διαδρομών δε φαίνεται να προσέφερε κάτι καινούριο. Αντιθέτως, θα μπορούσαμε να πει κανείς ότι τα πράγματα έγιναν μάλλον πιο περίπλοκα, μιας και έχουμε επί της ουσίας να υπολογίσουμε άπειρα ολοκληρώματα! Ωστόσο, δεν είναι ακριβώς έτσι. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η διαχείριση ενός κβαντικού συστήματος με το συνηθισμένο τρόπο είναι πολύ πιο περίπλοκη απ' ό,τι με τα ολοκληρώματα διαδρομών. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, και πλέον θα πρέπει να είναι ξεκάθαρο με μια απλή ματιά στη συνεχή έκδοσή του, το ολοκλήρωμα διαδρομών είναι όσο πιο κοντά γίνεται στην "κλασική" περιγραφή ενός κβαντικού συστήματος. Πράγματι, για πρώτη φορά, έχουμε μια κβαντική θεωρία χωρίς τελεστές. Αυτό μπορεί να μη φαίνεται και τόσο σημαντικό, ωστόσο σε πληθώρα προβλημάτων η περιγραφή με τελεστές αποτυγχάνει ή γίνεται πολύ στρυφνή λόγω του ότι στους τελεστές η διάταξη έχει πολύ μεγάλη σημασία, εν αντιθέσει με τις συναρτήσεις. Επίσης καταφέραμε να βάλουμε στο φορμαλισμό την ποσότητα της δράσης. Όμως, ξέρουμε πολύ καλά από την αναλυτική μηχανική ότι η δράση παρέχει ένα πολύ βολικό εργαλείο για να περιγράψουμε διακυμάνσεις -θυμηθείτε την τροχιά που την καθιστά στάσιμη και την ανάπτυξη γύρω από αυτή. Επομένως έχουμε ένα εργαλείο που θα μπορούσε να περιγράψει με άμεσο τρόπο κβαντικές διακυμάνσεις, κάτι που είναι ζωτικής σημασίας σε θεωρίες πεδίου. Ακόμη, επιτρέπει νέες προσεγγίσεις σε περίπλοκα συστήματα. Το επιμύθιο εδώ δεν είναι ότι το ολοκλήρωμα διαδρομών έδωσε κάτι απόλυτα καινούριο: για την ακρίβεια, έχει αποδειχτεί η ισοδυναμία του με την προσέγγιση Schrödinger. Αυτό που πρέπει να κρατήσουμε εδώ είναι ότι έχουμε μια περιγραφή του συστήματος η οποία είναι για πρώτη φορά παγκόσμια -εφόσον λαμβάνονται υπ' όψιν όλες οι ιστορικές εξελίξεις. Ο απώτερος στόχος είναι να καταφέρουμε να βρούμε όλες τις ιδιότητες του συστήματος με αυτό το νέο φορμαλισμό.

3.3 Συνάρτηση επιμερισμού για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή

Η βιβλιογραφία είναι γεμάτη με συγκεκριμένα παραδείγματα στα οποία χρησιμοποιούνται τα ολοκληρώματα διαδρομών για την εξαγωγή χρήσιμων φυσικών ποσοτήτων. Η αντιμετώπιση ενός ολοκληρώματος διαδρομών και οι προεκτάσεις όπου οδηγούν οι υπολογισμοί που υπεισέρχονται σ' αυτό είναι ένα πολύ μεγάλο κεφάλαιο, ακόμη κι όταν αντιμετωπίζουμε την απλούστερη των περιπτώσεων, το ελεύθερο σωματίο. Θα επιλέξουμε να μην αναλωθούμε σ' αυτές. Αντ' αυτού, θα παρουσιάσουμε ένα πολύ συγκεκριμένο παράδειγμα, το οποίο είναι εμβληματικής σημασίας για τη συνέχεια της διατριβής, τον αρμονικό ταλαντωτή. Η χρησιμότητά του είναι υπεράνω πάσης αμφιβολίας, οι εφαρμογές του στη φυσική αναρίθμητες και άρα είναι

εξαιρετικά ουσιώδες να μελετηθεί από τη σκοπιά του ολοκληρώματος διαδρομών. Στόχος μας είναι να βρούμε τη συνάρτηση επιμερισμού ενός τέτοιου συστήματος, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μέσω του ολοκληρώματος διαδρομών.

Η συνάρτηση επιμερισμού μπορεί να υπολογιστεί τόσο στο διακριτό όσο και στο συνεχές όριο, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη εκδοχή του ολοκληρώματος διαδρομών. Ένα μεγάλο μέρος της παρούσας διατριβής επικεντρώνεται στον υπολογισμό τέτοιων ολοκληρωμάτων στο συνεχές, μιας και αυτά παρουσιάζουν κάποια προβλήματα, τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω. Επομένως, εδώ θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα διαδρομών στο συνεχές.

Ξεκινάμε από την ποσότητα $\langle x_b | e^{-i \int_{t_a}^{t_b} dt \hat{H}/\hbar} | x_a \rangle$ (θεωρούμε τις παραμέτρους του συστήματος χρονοανεξάρτητες). Θέτουμε $t_b - t_a = T$, ώστε να μας αφορά μόνο η χρονική διάρκεια και όχι οι ακριβείς χρονικές στιγμές. Επομένως έχουμε

$$\langle x_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | x_a \rangle = \mathcal{N} \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt (\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x(t), t))}, \quad (3.15)$$

όπου $V(x(t), t) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$.

Προχωρούμε θέτοντας $x(t) = x_{cl}(t) + \eta(t)$ στη δράση, δηλαδή χωρίσαμε τη μεταβλητή στην κλασική λύση -είναι η λύση που καθιστά το συναρτησοειδές της δράσης στάσιμο- και στις διακυμάνσεις γύρω από αυτή. Το δε ολοκλήρωμα διαδρομών προφανέστατα πλέον γίνεται ως προς τις διακυμάνσεις, αφού η κλασική λύση είναι συγκεκριμένη. Η κλασική λύση είναι πολύ εύκολο να βρεθεί. Η εξίσωση Euler-Lagrange δίνει

$$\ddot{x}_{cl} + \omega^2 x_{cl} = 0, \quad (3.16)$$

ενώ επιβάλλουμε σε αυτή τις συνοριακές συνθήκες (το οποίο σημαίνει ότι η συνοριακή συνθήκη για τη διακύμανση είναι να μηδενίζεται την αρχική και την τελική στιγμή). Έτσι, πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε την κλασική λύση

$$x_{cl}(t) = \frac{x_b \sin \omega t + x_a \sin \omega (T - t)}{\sin \omega T}. \quad (3.17)$$

Τώρα, εισάγοντας τη (3.17) στην (3.15), μπορούμε να γράψουμε

$$\langle x_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | x_a \rangle = \mathcal{N} \int_{\eta(0)=\eta(T)=0} \mathcal{D}\eta e^{\frac{im}{2\hbar} \int_0^T dt (\dot{x}_{cl}^2 + 2\dot{x}_{cl}\dot{\eta} + \dot{\eta}^2 - \omega^2 x_{cl}^2 - 2\omega^2 x_{cl}\eta - \omega^2 \eta^2)}. \quad (3.18)$$

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος μπορεί να ολοκληρωθεί κατά παράγοντες και να συνδυαστεί με τον πέμπτο όρο του ολοκληρώματος δίνοντας λόγω της (3.16) 0. Επομένως οι συνεισφορές από την κλασική λύση και από τις διακυμάνσεις απεμπλάκησαν εντελώς -όλοι οι όροι της ολοκληρωτέας αφορούν είτε μόνο την κλασική λύση είτε μόνο τις διακυμάνσεις.

Ο όρος που αφορά την κλασική δράση είναι προφανές ότι μπορεί να γραφτεί ως $e^{\frac{im}{2\hbar} \int_0^T dt (\dot{x}_{cl}^2 - \omega^2 x_{cl}^2)}$. Όμως η κλασική λύση είναι γνωστή, οπότε μπορεί να

3.3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΠΛΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ25

αντικατασταθεί. Τα δε ολοκληρώματα είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν. Η συνεισφορά επομένως στο πλάτος που προέρχεται από την κλασική δράση θα είναι

$$A_{cl} = e^{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T} [(x_b^2 + x_a^2)\cos\omega T - 2x_a x_b]}. \quad (3.19)$$

Μένει να υπολογιστεί η συνεισφορά των διακυμάνσεων:

$$A_\eta = \int_{\eta(0)=\eta(T)=0} \mathcal{D}\eta e^{\frac{im}{\hbar} \int_0^T dt (\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2)}. \quad (3.20)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τον πρώτο όρο στο εκθετικό, αυτή μετατρέπεται στην

$$A_\eta = \int_{\eta(0)=\eta(T)=0} \mathcal{D}\eta e^{\frac{im}{\hbar} \int_0^T dt \eta(-\partial_t^2 - \omega^2)\eta}. \quad (3.21)$$

Αν στον εκθέτη δεν είχαμε ολοκληρώμα αλλά άθροισμα είναι προφανές ότι θα έπρεπε να υπολογίσουμε απλώς μια ορίζουσα, εκείνη του τελεστή $-\partial_t^2 - \omega^2$, διότι το ολοκληρώμα τότε θα ήταν Gaussian οπότε το αποτέλεσμα θα ήταν $\sqrt{\frac{\pi}{\text{Det}(-\partial_t^2 - \omega^2)}}$.

Κι εδώ το ίδιο θα συμβεί, με την επισήμανση ότι οι ορίζουσες στο συνεχές δεν είναι τόσο απλό να γραφούν. Πράγματι, αυτή η ορίζουσα στο συνεχές αποκλίνει. Αυτό που μπορούμε ωστόσο να ορίζουμε στο συνεχές, είναι πηλίκα οριζουσών. Συνήθως για αυτό το σκοπό χρησιμοποιείται το ελεύθερο σωματίο. Οι λεπτομέρειες σχετικά με αυτό το θέμα δε μας απασχολούν εδώ και μπορούν να βρεθούν στην βιβλιογραφία. Αρκούμαστε στο να επισημάνουμε ότι η ορίζουσα αυτή χωρίς να ρεγουλαριστεί από την αντίστοιχη του ελεύθερου σωματίου θα αποκλίνει. Αντ' αυτού η ορίζουσα $\frac{\text{Det}(-\partial_t^2 - \omega^2)}{\text{Det}(-\partial_t^2)}$, είναι καλά ορισμένη και μπορεί να υπολογιστεί.

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές που μας ενδιαφέρουν πρέπει να κάνουμε το μετασχηματισμό Fourier. Πράγματι, η σύνδεση με τη διακριτή έκδοση υποδεικνύει ότι στο διακριτό θα έχουμε ένα πλέγμα, όπου όντως οι ιδιοσυχνότητες είναι οι ποσότητες ενδιαφέροντος και μπορούν να βρεθούν από το μετασχηματισμό Fourier

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega'. \quad (3.22)$$

Για να μην υπάρχει σύγχυση μεταξύ της συχνότητας του απλού αρμονικού ταλαντωτή και της ιδιοσυχνότητας που υπάρχει στην ανάλυση Fourier, για τη δεύτερη χρησιμοποιούμε τονούμενο σύμβολο. Η συνοριακή συνθήκη $\eta(0) = 0$ υποδεικνύει ότι στην πραγματικότητα αντί για εκθετικό πρέπει εδώ να χρησιμοποιηθεί ημίτονο, ενώ μπορεί και η ολοκλήρωση να περιοριστεί στις θετικές ιδιοσυχνότητες ($\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\omega') \sin\omega' t d\omega' = \int_{-\infty}^0 \eta(\omega') \sin\omega' t d\omega' + \int_0^{\infty} \eta(\omega') \sin\omega' t d\omega' = \int_0^{\infty} (\eta(\omega') + \eta(-\omega')) \sin\omega' t d\omega'$, οπότε απλά δίνουμε άλλο όνομα στο συντελεστή Fourier). Η δε συνοριακή συνθήκη $\eta(T) = 0$ δεσμεύει ακόμα περισσότερο τις ιδιοσυχνότητες στις τιμές $\omega' = \frac{\pi m}{T}$, $m = 1, 2, \dots$. Από τη μορφή του μετασχηματισμού Fourier είναι προφανές ότι $-\partial_t^2 x = \omega'^2 x$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του τελεστή που φάχνουμε είναι τα τετράγωνα των ιδιοσυχνοτήτων. Άρα η ποσότητα που φάχνουμε είναι ίση με

$$\frac{\text{Det}(-\partial_t^2 - \omega^2)}{\text{Det}(-\partial_t^2)} = \prod \frac{\omega'^2 - \omega^2}{\omega'^2} = \prod_{n=1}^{\infty} [1 - (\frac{\omega T}{\pi n})^2] = \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \quad (3.23)$$

Παρατηρήστε πόσο απαραίτητο ήταν το ρεγουλάρισμα με το ελεύθερο σωματίο: χωρίς αυτό, το αποτέλεσμα θα ήταν $\text{Det}(-\partial_t^2 - \omega^2) = \prod_{n=1}^{\infty} [(\frac{\pi n}{T})^2 - \omega^2]$, το οποίο ξεκάθαρα αποκλίνει. Βέβαια, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τον παράγοντα κανονικοποίησης το συνολικό αποτέλεσμα δεν αποκλίνει απαραίτητα -δεν είναι καλά ορισμένο. Το ρεγουλάρισμα, όμως, επιτρέπει την πραγματοποίηση του υπολογισμού.

Τώρα μπορούμε να συγκεντρώσουμε τα παραπάνω και να συμπεράνουμε ότι

$$\langle x_b | e^{-i \int_0^T dt \hat{H}/\hbar} | x_a \rangle = \mathcal{N}' \sqrt{\frac{\omega T}{\sin \omega T}} e^{\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} [(x_a^2 + x_b^2) \cos \omega T - 2x_a x_b]}. \quad (3.24)$$

Οι παράγοντες $\sqrt{\pi}$ που επιφέρουν τα Gaussian ολοκληρώματα υπάρχουν και στον αριθμητή και στον παρονομαστή στο πηλίκο των οριζουσών, οπότε απλοποιούνται. Το μόνο που μένει είναι να υπολογίσουμε με κάποιο τρόπο τη σταθερά κανονικοποίησης, η οποία πήρε νέα τιμή λόγω του ρεγουλάρισματος με την ορίζουσα του ελεύθερου σωματίου, αλλά βέβαια παραμένει ανεξάρτητη του ακριβούς δυναμικού. Θα χμεταλευτούμε το ότι είναι παγκόσμια και δεν εξαρτάται από το δυναμικό. Έτσι, θα επιλέξουμε να τη βρούμε από το απλούστερο δυνατό πρόβλημα: εκείνο του ελεύθερου σωματίου. Η λογική μας θα είναι να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για το ελεύθερο σωματίο και να αντιπαραβάλλουμε το αποτέλεσμα με εκείνο που προκύπτει από τη διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών. Η διαδικασία επίλυσης αυτού του προβλήματος στο διακριτό υπάρχει στη βιβλιογραφία και δε θα την επαναλάβουμε εδώ, μιας και σ' αυτή τη διατριβή ενδιαφερόμαστε κυρίως για τη συνεχή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών. Το αποτέλεσμα που προκύπτει λοιπόν από τη διακριτή έκδοση είναι

$$\langle x_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | x_a \rangle_{free} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{T}}. \quad (3.25)$$

Τώρα ας δουμε τι δίνει ο υπολογισμός στο συνεχές. Είναι προφανές ότι η κλασική λύση τότε θα είναι $x_{cl} = x_a + \frac{x_b - x_a}{T}t$, επομένως η κλασική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα διαδρομών είναι ακριβώς το εκθετικό που υπάρχει στον τύπο που προκύπτει από το διακριτό, $e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{T}}$. Η δε συνεισφορά από τις διακυμάνσεις είναι απλώς μονάδα, διότι είναι το πηλίκο δύο ακριβώς ίδιων οριζουσών, μιας και έχουμε να ρεγουλάρουμε το ελεύθερο σωματίο με τον εαυτό του. Επομένως με αντιπαραβολή των δύο αποτελεσμάτων προκύπτει

$$\mathcal{N}' = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}}. \quad (3.26)$$

Άρα, το πλάτος μετάβασης για τον αρμονικό ταλαντωτή είναι

3.3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΠΛΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ27

$$\langle x_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | x_a \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \sqrt{\frac{\omega T}{\sin\omega T}} e^{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T} [(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b]} \quad (3.27)$$

ή

$$\langle x_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | x_a \rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}} e^{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T} [(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b]}. \quad (3.28)$$

Η συνέχεια είναι πολύ εύκολη. Για τη συνάρτηση επιμερισμού, θέτουμε $x_a = x_b$ και ολοκληρώνουμε και ως προς αυτή τη μεταβλητή. Το ολοκλήρωμα είναι Gaussian με φανταστικό εκθέτη και αρνητικό φανταστικό μέρος, οπότε εύκολα λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$Z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_a e^{\frac{2im\omega}{2\hbar\sin\omega T} (\cos\omega T - 1)x_a^2} = \frac{1}{2i\sin\frac{\omega T}{2}}. \quad (3.29)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να ελεγχθεί πολύ εύκολα. Από τη συμβατική κβαντομηχανική γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές-ενέργειες του αρμονικού ταλαντωτή. Αν θυμηθούμε τη συνάρτηση επιμερισμού γραμμένη μέσω του ίχνους, είναι κατανοητό ότι μια εναλλακτική, ισοδύναμη γραφή της είναι

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iTE_n/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iT\omega(n+\frac{1}{2})} = e^{-\frac{i\omega T}{2}} \frac{1}{1 - e^{-i\omega T}} = \frac{1}{2i\sin\frac{\omega T}{2}}. \quad (3.30)$$

Άρα, συνάγουμε ότι τα δύο αποτελέσματα συμφωνούν. Αυτό είναι μια πρώτη σοβαρή ένδειξη ότι το ολοκλήρωμα διαδρομών είναι πράγματι καλά ορισμένο και αποτελεί ένα δόκιμο και συνεπή τρόπο υπολογισμού ποσοτήτων. Όμως, όπως θα δούμε στη συνέχεια τα πράγματα δεν είναι πάντα έτσι. Για την ακρίβεια, το ολοκλήρωμα διαδρομών χρειάζεται πάρα πολύ προσοχή όταν δουλεύουμε στο συνεχές. Θα το αναλύσουμε στη συνέχεια περισσότερο, αλλά προς το παρόν επισημαίνουμε μια ιδιαιτερότητα της παραπάνω ανάλυσης: η Hamiltonian από την οποία ξεκίνησαν οι υπολογισμοί μας είναι γραμμένη υπό όρους θέσης και ορμής. Αν γραφτεί υπό όρους άλλων μεταβλητών, όπως θα δείξουμε, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά: η συνάρτηση επιμερισμού δε βγαίνει σωστή αν ακολουθήσουμε τα εύλογα βήματα.

Ένα μέρος της διατριβής αυτής ασχολείται ακριβώς με αυτή την υπόθεση: με τις προϋποθέσεις και τους κανόνες υπό τους οποίους το ολοκλήρωμα διαδρομών στο συνεχές είναι καλά ορισμένο και δίνει τα σωστά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 4

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΣΟ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε μια σειρά από ενοχλητικές ασυνέπειες που εμφανίζονται στο ολοκληρώμα διαδρομών, όταν αντιμετωπιστεί με κάποιον τρόπο διαφορετικό απ' αυτόν που εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο - παρακάτω θα γίνει σαφές το τι ακριβώς εννοούμε με αυτό. Επισημαίνουμε από τώρα πως όταν δουλεύουμε με τη διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα και τα αποτελέσματα είναι πάντα τα αναμενόμενα. Ωστόσο, οι υπολογισμοί στο διακριτό ακόμη και για απλά συστήματα, όπως το ελεύθερο σώμα ή ο αρμονικός ταλαντωτής, είναι εξαιρετικά μακροσκελείς και συχνά άβολοι ή εντελώς αδύνατοι - πράγμα εύλογο μιας και επί της ουσίας έχουμε να υπολογίσουμε άπειρα ολοκληρώματα, οπότε η μόνη ελπίδα είναι οι αντίστοιχοι όροι να απεμπλέκονται, που δε συμβαίνει ποτέ, ή να καταφέρουμε να βρούμε έναν αναδρομικό τύπο, που δε συμβαίνει συχνά, κι αυτό μόνο αν έχουμε τετραγωνικές συναρτήσεις ώστε τα ολοκληρώματα να είναι Gaussian, μιας και σε διαφορετική περίπτωση δεν έχουμε κάποια γενική μέθοδο για να επιλύσουμε τα ολοκληρώματα. Αντίθετα, στο συνεχές υπάρχουν μαθηματικά εργαλεία που επιταχύνουν κατά πολύ τους υπολογισμούς, όπως είδαμε και στην εύρεση της συνάρτησης επιμερισμού του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Επομένως είναι ευκαταίω να μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς στο συνεχές με συνέπεια.

Παρακάτω θα δείξουμε ότι συχνά αυτή η προσπάθεια οδηγεί σε αντιφάσεις [23], [24], [38], [39], [40]. Επιπλέον, σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε κάποιες μεθόδους αντιμετώπισης των αντιφάσεων που εμφανίζονται, ενώ θα εξηγήσουμε και την ανάγκη της εύρεσης μιας πιο θεμελιωμένης μεθόδου, την οποία θα προτείνουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Όμως πριν απ' αυτό θα δώσουμε κάποιες εισαγωγικές επισημάνσεις για μια βάση καταστάσεων ιδιαίτερα χρήσιμη στη φυσική, η χρήση της οποίας θα αναδείξει τα προαναφερθέντα προβλήματα. Πρόκειται για τη βάση των συνοχικών καταστάσεων [41], [44], [58].

4.1 Συνοχικές καταστάσεις

Θα ξεκινήσουμε με τη φυσική σημασία των συνοχικών καταστάσεων: είναι εκείνες οι καταστάσεις οι οποίες προσεγγίζουν δυναμικά όσο καλύτερα γίνεται τις καταστάσεις του κλασικού αρμονικού ταλαντωτή -δηλαδή μιμούνται όσο καλύτερα γίνεται τη συμπεριφορά ενός κλασικού ταλαντωτή. Οι εφαρμογές τους ποικίλουν και είναι εξαιρετικά χρήσιμες σε πολλούς κλάδους της φυσικής και των μαθηματικών, όπως η επεξεργασία σημάτων, η κβαντική οπτική, η κβάντωση κλπ.

Μαθηματικώς, ως συνοχική κατάσταση ορίζεται η ιδιοκατάσταση του τελεστή καταστροφής, δηλαδή η ιδιοκατάσταση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle. \quad (4.1)$$

Ο τελεστής \hat{a} δεν είναι ερμητιανός, το οποίο σημαίνει ότι η ιδιοτιμή του είναι εν γένει μιγαδικός αριθμός. Ο παραπάνω τύπος φυσικώς σημαίνει ότι η κατάσταση που προκύπτει από την καταστροφή ενός σωματιδίου (ή ύπο την καταστροφή μιας πηδαικής διέγερσης, αν αναφερόμαστε σε πεδία) είναι ανάλογη της αρχικής.

Για να καταλάβουμε γιατί αυτές οι καταστάσεις είναι όντως οι καταστάσεις που είναι όσο πλησιέστερες γίνεται σε κλασικές, πρέπει να αναρωτηθούμε τι σημαίνει αυτό μαθηματικώς. Τι διαχωρίζει μια κβαντική κατάσταση από μια κλασική; Ένα μέγεθος που είναι θεμελιώδες είναι η αβεβαιότητα όπως εκφράζεται από την αντίστοιχη αρχή του Heisenberg. Πράγματι, κλασικά οι τροχιές είναι καθορισμένες, οπότε δεν υπάρχει καμία αβεβαιότητα. Άρα, όταν λέμε ότι μια κατάσταση είναι όσο πλησιέστερα γίνεται σε μια κλασική, θα εννοούμε ότι έχει την ελάχιστη αβεβαιότητα, δηλαδή ότι αντιστοιχεί στην κατάσταση που κάνει την αρχή της απροσδιοριστίας ισότητα (προφανώς δε μπορούμε ποτέ να περιμένουμε μηδενική αβεβαιότητα για μια κβαντική κατάσταση).

Τώρα θυμίζουμε τους ορισμούς των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής για απλό αρμονικό ταλαντωτή:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}, \quad (4.2)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}. \quad (4.3)$$

Η δε σχέση μετάθεσής τους είναι

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (4.4)$$

ενώ η σχέση $\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$ συνεπάγεται ότι $z^* \langle z| = \langle z| \hat{a}^\dagger$.

Από τις παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τις αβεβαιότητες $(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$, $(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$ για τις συνοχικές καταστάσεις:

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad (4.5)$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}. \quad (4.6)$$

Επομένως

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (4.7)$$

δηλαδή είναι όντως καταστάσεις ελάχιστης αβεβαιότητας. Σημειώνουμε ότι έχουμε θεωρήσει τις συνοχικές καταστάσεις κανονικοποιημένες στη μονάδα.

Προχωρούμε σε κάποιες πολύ σημαντικές εκφράσεις και ιδιότητες των συνοχικών καταστάσεων. Είναι εξαιρετικά βολικό να τις εκφράζουμε ως γραμμικό συνδυασμό των καταστάσεων με συγκεκριμένο αριθμό σωματιδίων (ή διεγέρσεων). Αυτές είναι οι ιδιοκαταστάσεις του αριθμητικού τελεστή $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Η δράση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής επάνω σε αυτές είναι:

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (4.8)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (4.9)$$

Όπως εξηγήσαμε ο τελεστής καταστροφής εξαφανίζει ένα σωματίδιο από την κατάσταση στην οποία δρα, επομένως εύλογα επιλέγεται ως κενό της θεωρίας η κατάσταση που δεν έχει καθόλου σωματίδια:

$$\hat{a} |0\rangle = 0. \quad (4.10)$$

Γράφοντας τη συνοχική κατάσταση στη βάση των ιδιοκαταστάσεων του αριθμητικού τελεστή $|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$, και απαιτώντας αυτή να είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή καταστροφής, λαμβάνουμε την αναδρομική σχέση $c_{n+1} = c_n \frac{z}{\sqrt{n+1}}$, η οποία υποδεικνύει για τους συντελεστές τη μορφή

$$c_n = C \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad (4.11)$$

όπου C μια συνολική σταθερά που θα βρεθεί από την κανονικοποίηση. Πράγματι, απαιτώντας η νόρμα της συνοχικής κατάστασης να είναι ίση με τη μονάδα και λαμβάνοντας υπ' όψιν το ότι οι καταστάσεις συγκεκριμένου αριθμού σωματιδίων σχηματίζουν ορθοκανονική βάση, λαμβάνουμε τη σταθερά $C = e^{-|z|^2/2}$, και άρα η συνοχική κατάσταση γράφεται

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle, \quad (4.12)$$

όπου στην τελευταία ισότητα παρατηρήσαμε μια εναλλακτική γραφή της έκφρασης που βρήκαμε. Έχοντας ανά χείρας αυτή την έκφραση είναι σχεδόν τετριμμένο να δείξουμε μια σειρά από βασικές ιδιότητες των συνοχικών καταστάσεων. Εδώ απλώς τις καταγράφουμε, διότι η απόδειξή τους είναι πολύ απλή με χρήση της έκφρασης που μόλις βρήκαμε.

Η πρώτη -και πολύ σημαντική- είναι ότι δύο συνοχικές καταστάσεις δεν είναι ορθογώνιες. Πράγματι

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = e^{z_1^* z_2 - \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}}. \quad (4.13)$$

Παραπάνω, επίσης, είδαμε ότι είναι πολύ σημαντικό μια βάση να δίνει ανάλυση της ταυτότητας για να μπορεί να αξιοποιηθεί σε ολοκληρώματα διαδρομών. Ευτυχώς, οι συνοχικές καταστάσεις έχουν αυτή την ιδιότητα:

$$\int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle \langle z| = \hat{I}, \quad (4.14)$$

όπου $d^2z = d(\operatorname{Re}z)d(\operatorname{Im}z)$. Αυτές οι δύο ιδιότητες σημαίνουν ότι η βάση των συνοχικών καταστάσεων δεν είναι πλήρης, αλλά υπερπλήρης. Επίσης $\langle z|\hat{a}|z\rangle = z$, το οποίο σημαίνει ότι το z μπορεί να ερμηνευτεί ως η μέση τιμή του τελεστή καταστροφής στη συνοχική κατάσταση $|z\rangle$. Παρομοίως, το z^* ερμηνεύεται ως η μέση τιμή του τελεστή δημιουργίας στη συνοχική κατάσταση $|z\rangle$.

Τέλος,

$$\langle z|\hat{B}|z'\rangle = e^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^{*n}z'^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|\hat{B}|m\rangle, \quad (4.15)$$

και κατ' επέκταση

$$\operatorname{tr}(\hat{B}) = \int \frac{d^2z}{\pi} \langle z|\hat{B}|z\rangle. \quad (4.16)$$

Αυτή η ενότητα μας παρέχει όλα τα εργαλεία που χρειαζόμαστε για να προχωρήσουμε στην κυρίως ανάλυση των προβλημάτων που προκύπτουν στα ολοκληρώματα διαδρομών όταν γράφονται συναρτήσει αυτής της βάσης.

4.2 Ολοκλήρωμα διαδρομών με συνοχικές καταστάσεις

Ας θυμηθούμε τη λογική πορεία που μας οδήγησε στη διακριτή και στη συνεχή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών. Εκεί, αυτό που κάναμε ήταν το χρονικό φετάρισμα -στην ουσία ένας διαχωρισμός του χρόνου σε ίσα κομμάτια ορισμένου πάχους- και στη συνέχεια η εισαγωγή της ταυτότητας μεταξύ των φετών. Στο προηγούμενο κεφάλαιο η ταυτότητα που εισάγαμε ήταν αναλυμένη σε ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της θέσης -και αργότερα εισάγαμε πάλι ταυτότητες αναλυμένες σε ιδιοκαταστάσεις του τελεστή ορμής. Ο λόγος ήταν φυσικά ότι η Hamiltonian ήταν γραμμένη συναρτήσει της θέσης και της ορμής.

Εύλογα μπορεί κανείς να αναρωτηθεί τι θα συνέβαινε αν γράφαμε τη Hamiltonian συναρτήσει τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Αυτό είναι βέβαια πάντα εφικτό αφού οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής είναι απλώς γραμμικοί συνδυασμοί εκείνων της θέσης και της ορμής. Σ' αυτή την περίπτωση, αφού όλα είναι γραμμένα υπό όρους τελεστών δημιουργίας και καταστροφής θα μας ενδιαφέρει το πλάτος μετάβασης από μια συνοχική κατάσταση σε μια άλλη, δηλαδή το

$$\langle z_b|e^{-i \int_0^T dt \hat{H}/\hbar}|z_a\rangle. \quad (4.17)$$

4.2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΜΕ ΣΥΝΟΧΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ 33

Λόγω της δομής που έχει η ταυτότητα αν αναλυθεί στις συνοχικές καταστάσεις, εδώ η διαδικασία εισαγωγής ταυτοτήτων θα αποδειχθεί πιο απλή. Πράγματι, αφού κάνουμε το φετάρισμα σε φέτες ίσου πάχους, τότε εισάγουμε ανάμεσα στις φέτες ταυτότητες. Έτσι:

$$\langle z_b | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \hat{H}} | z_a \rangle = \prod_{n=1}^N \frac{dz_n^* dz_n}{2\pi i} \prod_{n=1}^{N+1} \langle z_n | e^{-\frac{\epsilon}{\hbar} \hat{H}} | z_{n-1} \rangle \quad (4.18)$$

και $z_a = z_0$, $z_{N+1}^* = z_b^*$, $\epsilon = \frac{T}{N+1}$.

Εν συνεχεία αναπτύσσουμε το εκθετικό μέχρι πρώτη τάξη ως προς ϵ και γράφουμε

$$\langle z_n | e^{-\frac{\epsilon}{\hbar} \hat{H}} | z_{n-1} \rangle = \langle z_n | z_{n-1} \rangle - i \frac{\epsilon}{\hbar} \langle z_n | \hat{H} | z_{n-1} \rangle \quad (4.19)$$

ή

$$\langle z_n | e^{-\frac{\epsilon}{\hbar} \hat{H}} | z_{n-1} \rangle = \langle z_n | z_{n-1} \rangle \left(1 - i \frac{\epsilon}{\hbar} \frac{\langle z_n | \hat{H} | z_{n-1} \rangle}{\langle z_n | z_{n-1} \rangle} \right). \quad (4.20)$$

Ο παράγοντας έξω από την παρένθεση είναι εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δυο συνοχικών καταστάσεων, οπότε είναι γνωστός από την (4.13) και ίσος με

$$e^{-|z_n|^2/2 - z_n^* z_{n-1}} = e^{-\frac{1}{2} [z_n^* (z_n - z_{n-1}) - (z_n^* - z_{n-1}^*) z_{n-1}]}, \quad (4.21)$$

ενώ θα ονομάσουμε $\frac{\langle z_n | \hat{H} | z_{n-1} \rangle}{\langle z_n | z_{n-1} \rangle} = H_n$. Πλέον μπορούμε και πάλι να προσεγγίσουμε όλον τον παράγοντα μέσα στην παρένθεση ως εκθετικό, και καταλήγουμε

$$\langle z_b | e^{-i \int_0^T dt \hat{H} / \hbar} | z_a \rangle = \prod_{n=1}^N \left(\frac{dz_n^* dz_n}{2\pi i} \right) e^{-\sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{1}{2} [z_n^* (z_n - z_{n-1}) - (z_n^* - z_{n-1}^*) z_{n-1}] + i \frac{\epsilon}{\hbar} H_n \right]}. \quad (4.22)$$

Αυτή είναι η διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών συναρτήσεως μιγαδικών μεταβλητών, όπως προέκυψαν από τις συνοχικές καταστάσεις. Επισημαίνουμε ότι η επίλυση ενός τέτοιου ολοκληρώματος είναι πάντα συνεπής και βγάζει τα σωστά αποτελέσματα. Ωστόσο, όπως είπαμε η συνεχής έκδοση παρέχει μια σειρά από πλεονεκτήματα, οπότε είναι εύλογο να προσπαθήσουμε να τη βρούμε. Πράγματι, παίρνοντας το όριο του άπειρου αριθμού φετών -ή μηδενικού πάχους τους- εύκολα καταλήγουμε στη:

$$\langle z_b | e^{-i \int_0^T dt \hat{H} / \hbar} | z_a \rangle' = e^{\frac{z_b^* z(T) + z^*(0) z_a - |z_a|^2 - |z_b|^2}{2}} \int_{z(0)=z_a}^{z^*(T)=z_b^*} \mathcal{D}^2 z e^{-\int_0^T dt \left[\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} + \frac{i}{\hbar} H(z, z^*) \right]}. \quad (4.23)$$

Αυτή είναι η συνεχής έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών, όπου για συντομία απορροφήθηκαν στα μέτρα ολοκλήρωσης και οι παράγοντες $2\pi i$ του παρονομαστή. Παρατηρήστε τα εξής δύο πολύ σημαντικά στοιχεία: πρώτον, ο πρώτος όρος της ολοκληρωτέας στον εκθέτη είναι ο κινητικός όρος. Η προέλευσή του είναι

το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δυο συνοχικών καταστάσεων, οπότε δεν εξαρτάται από τη δυναμική, πράγμα απολύτως αναμενόμενο για ένα κινητικό όρο. Δεύτερον, ο δεύτερος όρος της ολοκληρωτέας είναι το συνεχές όριο της ποσότητας που ορίσαμε ως H_n , δηλαδή $H(z, z^*) = \langle z | \hat{H} | z \rangle$. Εκεί περιλαμβάνεται όλη η δυναμική του προβλήματος.

4.3 Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής με συνοχικές καταστάσεις

Ας δούμε τώρα το απλό παράδειγμα του αρμονικού ταλαντωτή. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε εκ νέου τη συνάρτηση επιμερισμού χρησιμοποιώντας τη συνεχή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών που μόλις βρήκαμε. Είναι ευνόητο ότι θα πρέπει να βρούμε την ίδια συνάρτηση επιμερισμού, είτε ο υπολογισμός γίνει με τις συνοχικές, είτε με τις ιδιοκαταστάσεις θέσης-ορμής, είτε με τις ενέργειες.

Η Hamiltonian του ταλαντωτή γραμμένη υπό όρους τελεστών δημιουργίας και καταστροφής μπορεί να βρεθεί εύκολα ότι είναι ίση με

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}), \quad (4.24)$$

ενώ το ολοκλήρωμα διαδρομών που μας ενδιαφέρει, γραμμένο στο συνεχές, γίνεται (η Hamiltonian είναι χρονοανεξάρτητη)

$$\langle z_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | z_a \rangle' = e^{\frac{z_b^* z(T) + z^*(0) z_a - |z_a|^2 - |z_b|^2}{2}} \int_{z(0)=z_a}^{z^*(T)=z_b^*} \mathcal{D}^2 z e^{-\int_0^T dt [\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} + i\omega(|z|^2 + \frac{1}{2})]}. \quad (4.25)$$

Ο όρος έξω από το ολοκλήρωμα καλείται επιφανειακός όρος διότι προέκυψε από τον κινητικό όρο γραμμένο στα σύνορα -την αρχική και την τελική στιγμή. Από την παραπάνω μπορούμε πολύ εύκολα να λάβουμε και τη συνάρτηση επιμερισμού:

$$Z' = \int_{pbc} \mathcal{D}^2 z e^{-\int_0^T dt [\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} + i\omega(|z|^2 + \frac{1}{2})]}. \quad (4.26)$$

Είναι πάρα πολύ εύκολο να δούμε όμως ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. Πράγματι, όπως είδαμε, η σωστή συνάρτηση επιμερισμού γραμμένη συναρτήσει θέσης και ορμής είναι:

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \int_{pbc} \mathcal{D}x e^{\int_0^T dt (ip\dot{x} - i(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2))}. \quad (4.27)$$

Με την κανονική αλλαγή μεταβλητών:

$$z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p, \quad (4.28)$$

$$z^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p, \quad (4.29)$$

4.3. Ο ΑΠΛΟΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΣΥΝΟΧΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ 35

αυτή γίνεται

$$Z = \int_{pbc} \mathcal{D}^2 z e^{-\int_0^T dt \left(\frac{\dot{z}^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} + i\omega |z|^2 \right)} \quad (4.30)$$

(όπου και πάλι απορροφήθηκε στο μέτρο ολοκλήρωσης ο παράγοντας $2\pi i$ του παρονομαστή). Η παραπάνω αλλαγή μεταβλητών είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός και επειδή το ολοκλήρωμα διαδρομών οφείλει να είναι αναλλοίωτο υπό τέτοιους μετασχηματισμούς, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις επιμερισμού (4.27) και (4.30) πρέπει να είναι ίσες. Επομένως καταλαβαίνουμε ότι το σύμβολο H που πρέπει να εισέλθει στο ολοκλήρωμα διαδρομών για τη Hamiltonian $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ είναι το $H = \hbar\omega|z|^2$, μιας και αυτό υπαγορεύεται από την ανάγκη αναλλοιώτητος υπό κανονικούς μετασχηματισμούς. Με άλλα λόγια, η (4.26) δίνει σαν αποτέλεσμα την πραγματική συνάρτηση επιμερισμού επί μία φάση, $Z' = e^{-i\omega T/2} Z$, δηλαδή ένα αποτέλεσμα ασυνεπές.

Την ίδια στιγμή, απαιτούμε η έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών στο συνεχές να μην εξαρτάται από τη διαδικασία διακριτοποίησης και άρα, για λόγους συνέπειας, η διακριτή του έκδοση να είναι μονοσήμαντα ορισμένη και αυτή. Αυτό μπορεί εκ πρώτης όψεως να φαίνεται τετριμμένο, ωστόσο παρακάτω, όταν θα μιλήσουμε για φερμιονικά ολοκληρώματα διαδρομών, θα δείξουμε ότι δυο διαφορετικές διαδικασίες διακριτοποίησης αποδίδουν διαφορετικά αποτελέσματα. Η διαδικασία θα μπορούσε να επαναληφθεί εντελώς ανάλογα και εδώ, απλά στη φερμιονική περίπτωση είναι πιο εύκολοι οι υπολογισμοί, οπότε αποφασίσαμε να παραθέσουμε τη μαθηματική απόδειξη εκεί. Απαιτώντας, λοιπόν, τα αποτελέσματα σε συνεχές και διακριτό να είναι συνεπή μεταξύ τους και επίσης αναλλοιώτητα υπό κανονικούς μετασχηματισμούς για κάθε φέτα, επιλέγουμε τη συμμετροποιημένη εκδοχή του διακριτού, $|z|^2 \leftrightarrow |z_n|^2$. Φυσικώς αυτό σημαίνει να πλησιάζουμε μια χρονική στιγμή ισοδύναμα και από τις μικρότερες και από τις μεγαλύτερες από αυτήν στιγμές. Πράγματι, μόνο και μόνο με τη συμμετροποιημένη εκδοχή εξασφαλίζουμε ότι η κάθε φέτα είναι αναλλοίωτη υπό κανονικούς μετασχηματισμούς. Έτσι, αν έχουμε οποιαδήποτε ελπίδα το ολοκλήρωμα διαδρομών να αναπαραστήσει κλασική φυσική, αναγκαστικά η διακριτή έκδοσή του πρέπει να είναι η συμμετροποιημένη.

Σημειώνεται, τέλος, ότι συχνά χρησιμοποιείται η στροφή Wick η οποία δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια αλλαγή μεταβλητής $\beta = \frac{i\tau}{\hbar}$. Για ευνόητους λόγους πολλές φορές αυτή η στροφή αναφέρεται ως προσέγγιση φανταστικού χρόνου. Η χρησιμότητά της είναι ότι συνδέει την κβαντική μηχανική με τη στατιστική φυσική με έναν πολύ προφανή τρόπο, ενώ φυσικά αν θέλουμε να επανέλθουμε στον πραγματικό χρόνο, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι στο τέλος να χρησιμοποιήσουμε εκ νέου τον παραπάνω ορισμό του χρόνου. Παρατηρήστε επίσης ότι μια τέτοια στροφή είναι σε θέση να ανάγει ένα πρόβλημα στο χώρο Minkowski σε ένα πρόβλημα στον Ευκλείδειο χώρο και αντίστροφα, αφού η μετρική του πρώτου έχει ένα πρόσημο μείον στο τετράγωνο της χρονικής μεταβλητής. Αλλιώς, μετατρέπει μια χωρική συνεταγμένη σε χρονική, προσφέροντας την ευκαιρία να ανάγεται ένα στατικό πρόβλημα σε δυναμικό σε ένα χώρο μιας διάστασης λιγότερης απ' τον αρχικό.

4.4 Μια πρόταση διόρθωσης

Επισημαίνουμε τα καίρια σημεία της προηγούμενης ενότητας: επιλέξαμε μια πολύ συγκεκριμένη διαδικασία διαχείρισης του διακριτού -την εισαγωγή ταυτοτήτων μεταξύ των φετών- και από εκεί οδηγηθήκαμε στην έκφραση του ολοκληρώματος διαδρομών στο συνεχές. Ωστόσο, είδαμε ότι τότε το αποτέλεσμα για τη συνάρτηση επιμερισμού δεν είναι το σωστό. Από την άλλη, γραμμένο υπό όρους θέσης και ορμής, το ολοκλήρωμα δεν παρουσιάζει ευαισθησία στη διαδικασία διακριτοποίησης και δίνει συνεπή αποτελέσματα. Θα δούμε αργότερα ότι αυτό οφείλεται στην ορθοκανονικότητα των αντίστοιχων βάσεων. Επίσης, δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε το σωστό αποτέλεσμα για τη συνάρτηση επιμερισμού, υπολογισμένη απευθείας στο συνεχές. Αυτό το αποτέλεσμα θα πρέπει να παραμένει ίδιο αν κάνουμε κανονικούς μετασχηματισμούς. Έτσι, κάνοντας στη συνεχή έκδοση του ολοκληρώματος διαδρομών τον κανονικό μετασχηματισμό που το εκφράζει υπό όρους μιγαδικών μεταβλητών, καταλαβαίνουμε ακριβώς ποια πρέπει να είναι η μορφή του κλασικού συμβόλου της Hamiltonian στο συνεχές για τον αρμονικό ταλαντωτή. Από αυτή εξάγουμε και τη διακριτή μορφή του, απαιτώντας αναλλοιωτότητα υπό κανονικούς μετασχηματισμούς για κάθε φέτα. Δηλαδή, η διακριτή μορφή είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ποια είναι η συνεχής, η οποία με τη σειρά της υπαγορεύεται από την ανάγκη της αναλλοιωτότητας υπό κανονικούς μετασχηματισμούς. Αυτό μας φιξάρει τη διακριτή έκδοση στη συμμετροποιημένη της μορφή, και αυτό από εδώ και μπρος θα το θεωρούμε δεδομένο.

Επομένως, για το αρμονικό ταλαντωτή βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η Hamiltonian $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ αντιστοιχεί στο σύμβολο $H = \hbar\omega|z|^2$ στη συνεχή έκδοση.

Το εμβληματικό ερώτημα είναι γιατί συμβαίνει αυτό αλλά και πώς θεραπεύεται η ασυνέπεια που συναντήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Το επιχείρημα της αναλλοιωτότητας υπό κανονικούς μετασχηματισμούς είναι μεν ισχυρό, αλλά είναι ισχυρό καθαρά απο φυσικής απόψεως. Επίσης ας μην ξεχνάμε ότι γνωρίζαμε εκ των προτέρων το σωστό αποτέλεσμα, οπότε κάναμε όλες τις θεωρήσεις προκειμένου να μπορούσαμε να το αναπαράγουμε. Αλλά τι συμβαίνει όταν οι Hamiltonians που έχουμε είναι πιο περίπλοκες από την απλή του αρμονικού ταλαντωτή; Τότε ενδεχομένως το αποτέλεσμα της συνάρτησης επιμερισμού να μην είναι εκ των προτέρων γνωστό, ή να μη το ψάχνουμε καν -το πλάτος μετάβασης είναι πολλές φορές πιο χρήσιμο, ίσως να αναζητείται αυτό. Έτσι μπαίνουμε εδώ σε τροχιά αναζήτησης μιας μεθόδου η οποία θα μπορεί να μας δώσει το κλασικό σύμβολο που εισέρχεται στη δράση της συνεχούς έκδοσης του ολοκληρώματος διαδρομών, για μια κβαντική Hamiltonian γραμμένη συναρτήσει τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Επιλέγουμε κανονικά διατεταγμένες Hamiltonians λόγω του ότι οι συνοχικές καταστάσεις είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή καταστροφής (κανονική διάταξη σημαίνει σε κάθε όρο να είναι γραμμένοι αριστερά όλοι οι τελεστές δημιουργίας και δεξιά όλοι οι τελεστές καταστροφής). Εννοείται ότι λόγω της σχέσης μετάθεσης μπορούμε να διατάξουμε κανονικά οποιονδήποτε όρο.

Οι Κορδάς, Μυστακίδης και Καρανίκας [16] πρότειναν μια συνταγή διαχείρισης αυτού του προβλήματος. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια Hamiltonian γραμ-

μένη συναρτήσει τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, κανονικά διατεταγμένη. Το πρώτο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό αυτών των τελεστών για να γράψουμε τη Hamiltonian συναρτήσει τελεστών θέσης και ορμής. Κατόπιν γράφουμε το κλασικό σύμβολο στη δράση απλώς αντικαθιστώντας τους τελεστές θέσης και ορμής με κλασικές μεταβλητές. Τώρα το ολοκλήρωμα διαδρομών είναι γραμμένο συναρτήσει κλασικής θέσης και κλασικής ορμής. Τέλος, με τον κανονικό μετασχηματισμό (4.28), (4.29) το γράφουμε συναρτήσει των μιγαδικών μεταβλητών μια εκ των οποίων είναι ιδιοτιμή του τελεστή καταστροφής και η άλλη είναι η συζυγής της. Σχηματικά:

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) \rightarrow \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) \rightarrow H(x, p) \rightarrow H(z, z^*). \quad (4.31)$$

Ας δούμε τι δίνει αυτή η συνταγή για το πλάτος μετάβασης και για τη συνάρτηση επιμερισμού για τον αρμονικό ταλαντωτή. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η Hamiltonian $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Η παραπάνω συνταγή δίνει:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) &\rightarrow \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \rightarrow \\ H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 &\rightarrow H(z^*, z) = \hbar\omega z^* z. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Επομένως όντως, μας δίνει το σύμβολο που θέλουμε. Το πλάτος μετάβασης είναι

$$\langle z_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | z_a \rangle = e^{\frac{2z_b^* z_a e^{-i\omega T} - |z_a|^2 - |z_b|^2}{2}} e^{-\frac{i\omega T}{2}}, \quad (4.33)$$

ενώ η συνάρτηση επιμερισμού γίνεται

$$Z = \frac{e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{1 - e^{-i\omega T}}. \quad (4.34)$$

Και τα δύο αποτελέσματα έχουν αναπαραχθεί με άλλες μεθόδους και είναι τα σωστά.

Εν συνεχεία θα προσπαθήσουμε να ελέγξουμε αυτή τη μέθοδο για ένα πιο σύνθετο σύστημα, τη Hamiltonian Bose-Hubbard. Η Hamiltonian αυτού του συστήματος είναι:

$$\hat{H} = -\mu\hat{a}^\dagger\hat{a} + U\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1). \quad (4.35)$$

Εδώ μ είναι το χημικό δυναμικό και U η ισχύς της αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων. Επειδή $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{n}$, ο αριθμητικός τελεστής, η συνάρτηση επιμερισμού μπορεί εύκολα να βρεθεί από τον ορισμό της με τις ενέργειες

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{iT}{\hbar}(-\mu n + U n(n-1))}. \quad (4.36)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω συνταγή, προσπαθώντας να αναπαράγουμε το αποτέλεσμα αυτό με χρήση του ολοκληρώματος διαδρομών στο συνεχές.

Η Hamiltonian αυτή μετατρέπεται σε κανονικά διατεταγμένη εύκολα: $\hat{H} = \mu \hat{a}^\dagger \hat{a} + U \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2$. Κατόπιν ακολουθούμε τη συνταγή για να δούμε τι σύμβολο πρέπει να βάλουμε στο ολοκλήρωμα διαδρομών:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\mu \hat{a}^\dagger \hat{a} + U \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rightarrow \hat{H} = -\frac{\mu+2U}{2\hbar\omega} (\frac{p^2}{m} + m\omega^2 \hat{x}^2) + \frac{U}{4(\hbar\omega)^2} (\frac{p^2}{m} + m\omega^2 \hat{x}^2)^2 + \\ &\frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4} \rightarrow H = -\frac{\mu+2U}{2\hbar\omega} (\frac{p^2}{m} + m\omega^2 x^2) + \frac{U}{4(\hbar\omega)^2} (\frac{p^2}{m} + m\omega^2 x^2)^2 + \frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4} \rightarrow \\ &\rightarrow H = -(\mu + 2U)|z|^2 + U|z|^4 + \frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Το δε ολοκλήρωμα διαδρομών στο συνεχές για τη συνάρτηση επιμερισμού γίνεται:

$$Z = e^{-\frac{iT}{\hbar}(\frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4})} \int_{periodic} \mathcal{D}^2 z e^{-\int_0^T dt (\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} - \frac{i}{\hbar}(\mu+2U)|z|^2 + \frac{iU}{\hbar}|z|^4)}. \quad (4.38)$$

Για την επίλυση αυτού του ολοκληρώματος θα χρειαστεί ο λεγόμενος μετασχηματισμός Hubbard-Stratonovich, [54], [55] ο οποίος περιλαμβάνει την εισαγωγή βοηθητικών πεδίων μέσω των ταυτοτήτων:

$$\int \mathcal{D}\zeta \delta[\zeta - |z|^2] = 1, \quad (4.39)$$

$$\int \mathcal{D}\sigma e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \sigma (\zeta - |z|^2)} = \delta[\zeta - |z|^2]. \quad (4.40)$$

Εισάγοντας αυτές τις δύο ταυτοτήτες το ολοκλήρωμα διαδρομών γίνεται:

$$Z = e^{-\frac{iT}{\hbar}(\frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4})} \int \mathcal{D}\zeta \int \mathcal{D}\sigma e^{-i \int_0^T dt \sigma \zeta + \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt [(\mu+2U)\zeta - U\zeta^2]} \Lambda, \quad (4.41)$$

όπου

$$\Lambda = \int_{per} \mathcal{D}^2 z e^{-\int_0^T dt (\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} - i\sigma |z|^2)}. \quad (4.42)$$

Όμως το τελευταίο ολοκλήρωμα διαδρομών (4.42) είναι ακριβώς η συνάρτηση επιμερισμού για έναν αρμονικό ταλαντωτή, ο οποίος έχει συχνότητα $-\sigma$. Θα μπορούσαμε να αντιγράψουμε λοιπόν το αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω αντικαθιστώντας αυτή τη συχνότητα. Υπάρχει μόνο μια μικρή λαπτομέρεια που πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν: σ είναι το βοηθητικό πεδίο που εισάγαμε, οπότε είναι χρονοεξαρτώμενο. Επομένως μας ενδιαφέρει η συνάρτηση επιμερισμού αρμονικού ταλαντωτή με χρονοεξαρτώμενη συχνότητα. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση $\omega T \rightarrow \int_0^T dt \omega$, οπότε το αποτέλεσμα του τελευταίου ολοκληρώματος διαδρομών είναι

$$\Lambda = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \sigma}}{1 - e^{i \int_0^T dt \sigma}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+\frac{1}{2}) \int_0^T dt \sigma}. \quad (4.43)$$

Αυτό είναι το πλεονέκτημα του μετασχηματισμού Hubbard-Stratonovich: μας επιτρέπει να ανάγουμε κάποια μεγάλη δύναμη ενός πεδίου -με την οποία δε μπορεί να υπολογιστεί το αντίστοιχο ολοκλήρωμα διαδρομών- σε κάποια μικρότερη -με την οποία μπορεί να υπολογιστεί. Πράγματι, η συνάρτηση επιμερισμού γίνεται:

$$Z = e^{-\frac{iT}{\hbar} (\frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} \int \mathcal{D}\zeta e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt [(\mu+2U)\zeta - U\zeta^2]} \mathcal{D}\sigma e^{-i \int_0^T dt \sigma (\zeta - n - \frac{1}{2})}. \quad (4.44)$$

Το ολοκλήρωμα διαδρομών ως προς σ τώρα, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (4.40), ισούται με $\delta[\zeta - n - \frac{1}{2}]$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε και το ολοκλήρωμα διαδρομών ως προς ζ :

$$Z = e^{-\frac{iT}{\hbar} (\frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} \int \mathcal{D}\zeta e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt [(\mu+2U)\zeta - U\zeta^2]} \delta[\zeta - n - \frac{1}{2}], \quad (4.45)$$

άρα

$$Z = e^{-\frac{iT}{\hbar} (\frac{\mu}{2} + \frac{3U}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{iT}{\hbar} [(\mu+2U)(n+\frac{1}{2}) - U(n+\frac{1}{2})^2]} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{iT}{\hbar} (-\mu n + U n(n-1))}, \quad (4.46)$$

που είναι πράγματι η σωστή συνάρτηση επιμερισμού.

Η μέθοδος αυτή λοιπόν φαίνεται να μπορεί να δουλέψει για τη Hamiltonian του απλού αρμονικού ταλαντωτή και για εκείνη του μοντέλου Bose-Hubbard. Επομένως φαίνεται ότι είμαστε σε θέση να αντιμετωπίσουμε επιτυχώς τα ολοκληρώματα διαδρομών που αφορούν αυτά τα δύο συστήματα. Ωστόσο τα όρια της δυνατότητας εφαρμογής της μεθόδου αυτής δεν είναι καθόλου ξεκάθαρα [8], [35]. Για την ακρίβεια, δεν υπάρχει κάποιος πραγματικά καλός λόγος να πιστεύουμε ότι η μέθοδος αυτή είναι γενικότερης ισχύος και μπορεί να δώσει τα σωστά αποτελέσματα για οποιοδήποτε σύστημα. Αλλά ακόμη και να είναι, υπάρχει κάτι άλλο που προκαλεί προβληματισμό για αυτή τη μέθοδο και αυτό είναι που στην πραγματικότητα μας οδήγησε στην αναζήτηση κάποιας άλλης: η μέθοδος αυτή είναι δεν είναι παρά μια παράκαμψη. Όπως έγινε κατανοητό από τα παραπάνω, όταν έχουμε μια Hamiltonian γραμμένη συναρτήσει τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, δεν υπάρχει κάποιος καλά θεμελιωμένος τρόπος για να αποφασίσουμε ποιο είναι το σύμβολο που πρέπει να βάλουμε στη δράση της συνεχούς έκδοσης του ολοκληρώματος διαδρομών. Αντίθετα, για Hamiltonians γραμμένες υπό όρους θέσεων και ορμών -τουλάχιστον για τις μικρές τάξεις που δουλέψαμε ως τώρα- η απλή λογική της αντικατάστασης τελεστών με συναρτήσεις έχει φανεί ότι δουλεύει. Άρα και γίνει αυτό, προφανώς μπορούν να επιλεχθούν οποιεσδήποτε μεταβλητές

για να γίνουν οι υπολογισμοί στο ολοκλήρωμα. Έτσι, μπορούν να επιλεχθούν οι μιγαδικές μεταβλητές, όπως κάναμε παραπάνω.

Όμως αυτή η διαδικασία δε μας δίνει απαντήσεις περί του για ποιο λόγο δε δουλεύει η απλή λογική που παρουσιάσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Για ποιο λόγο όταν δουλεύουμε με συνοχικές καταστάσεις τα αποτελέσματά μας είναι τόσο ευαίσθητα στη διαδικασία που ακολουθήσαμε για το φετάρισμα ενώ όταν δουλεύουμε με καταστάσεις θέσης και ορμής δεν είναι; Επίσης πώς μπορεί κανείς να περάσει από το επίπεδο των τελεστών σε εκείνο των συναρτήσεων απευθείας, παρακάμπτοντας το διακριτό -μιας και όπως είδαμε κατά τη μετάβαση από το διακριτό στο συνεχές εμφανίζονται εν γένει προβλήματα- ακόμη κι αν οι ποσότητές μας είναι γραμμένες υπό όρους τελεστών δημιουργίας και καταστροφής; Και τέλος σε ποιες ακριβώς περιπτώσεις μπορεί κανείς να κάνει κάτι τέτοιο;

Σε αυτά τα ερωτήματα θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα θεμελιώσουμε μια νέα θεώρηση, σχετικά με την ανταπόκριση κβαντικών τελεστών και συναρτήσεων που πρέπει να τοποθετηθούν στη δράση ενός ολοκληρώματος διαδρομών, με τρόπο ώστε τα αποτελέσματά μας να είναι σωστά είτε δουλεύουμε με τελεστές θέσης και ορμής, είτε με δημιουργίας και καταστροφής.

Κεφάλαιο 5

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΒΑΝΤΩΣΗ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να ξεδιαλύνουμε τις ασυνέπειες που επισημάναμε στο προηγούμενο, ξεκινώντας από ένα πιο θεμελιώδες επίπεδο, από μαθηματικής απόψεως. Θα πρέπει να έχει γίνει πια σαφές ότι το σκεπτικό της απλής αντικατάστασης τελεστών από συναρτήσεις δεν είναι ούτε καλά δικαιολογημένο ούτε οδηγεί πάντα σε σωστά αποτελέσματα. Πράγματι, αυτή η ιδέα είχε εξεταστεί από τα πρώτα χρόνια της γέννησης της κβαντικής μηχανικής, αλλά σύντομα φάνηκε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εν γένει εφικτό.

Το σημείο-κλειδί είναι φυσικά ότι οι τελεστές και οι κλασικές συναρτήσεις είναι μαθηματικώς πολύ διαφορετικά αντικείμενα, ενώ και οι δομές πάνω στις οποίες εκδηλώνονται είναι εκ θεμελίων διαφορετικές, και άρα οποιαδήποτε απόπειρα σύνδεσής τους θα πρέπει να γίνεται με τεράστια προσοχή. Φυσικά αυτό είναι μια υπόθεση που αφορά άμεσα το ολοκλήρωμα διαδρομών στο συνεχές. Όντως, αφού ξεκινάμε από μια κβαντική Hamiltonian και αναζητούμε ένα κλασικό σύμβολο-συνάρτηση για να βάλουμε στη δράση του ολοκληρώματος διαδρομών, πρέπει να κάνουμε ακριβώς αυτό: να βρούμε δηλαδή μια συνταγή ανταπόκρισης τελεστών και συναρτήσεων. Επισημαίνουμε και πάλι ότι στο διακριτό, οποιαδήποτε διαδικασία φεταρίσματος κι αν επιλεχθεί, το αποτέλεσμα είναι σωστό, πράγμα που σημαίνει ότι τα προβλήματα ξεκινούν από τη μετάβαση στο συνεχές. Η δε ευαισθησία που έχει στη διαδικασία διακριτοποίησης το αποτέλεσμα στο συνεχές, υποδεικνύει ότι πρέπει να ψάξουμε μια μέθοδο που δε θα περνά από το διακριτό αλλά θα δίνει απευθείας την κλασική συνάρτηση που αντιστοιχεί στο συνεχές. Επισημαίνουμε ότι ο κινητικός όρος προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο γειτονικών καταστάσεων, ανεξαρτήτως της διαδικασίας φεταρίσματος, οπότε η μορφή του εξαρτάται μόνο από την επιλογή της βάσης.

5.1 Κβάντωση με ημιμορφές

Σε αυτή την ενότητα θα συναντήσουμε μαθηματικές ορολογίες που είναι ιδιαιτέρως τεχνικές. Εδώ δε θα αναλωθούμε στους ακριβείς μαθηματικούς ορισμούς των εννοιών που θα συναντάμε -άλλωστε αυτοί υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Αντ' αυτού θα δίνουμε μια πολύ αδρή περιγραφή του περιεχομένου τους, προσπαθώντας να παραμένουμε όσο πιο φυσικά διαισθητικοί γίνεται.

Όπως είπαμε το αντικείμενο αναζήτησης είναι ένας μηχανισμός σύνδεσης τελεστών και συναρτήσεων. Η υποβόσκουσα δομή των τελεστών της κβαντικής μηχανικής είναι ένας χώρος Hilbert (ένας αφηρημένος διανυσματικός χώρος που διαθέτει την πράξη του εσωτερικού γινομένου), ενώ εκείνη των κλασικών συναρτήσεων μια πολλαπλότητα (ένας τοπολογικός χώρος που αν ζουμάσουμε σε κάποιο σημείο του θα δούμε Ευκλείδειο χώρο). Η γεωμετρική κβάντωση είναι μια διαδικασία όπου δοθείσας μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας βρίσκουμε τη δομή κάποιου χώρου Hilbert που κατασκευάζεται επάνω στην πολλαπλότητα.

Ο χώρος Hilbert θεωρείται ότι στήνεται από τομείς ενός μιγαδικού γραμμικού δέματος με σύνδεση το συμπλεκτικό δυναμικό. Το γραμμικό δέμα είναι ένα αντικείμενο που προκύπτει διαλέγοντας ένα μιγαδικό, μονοδιάστατο διανυσματικό χώρο σε κάθε σημείο μιας τοπολογικής πολλαπλότητας με συνεχή τρόπο. Τομέας είναι το αντίστροφο ενός μορφισμού (ενός χάρτη από ένα μαθηματικό χώρο σε έναν άλλο ίδιου τύπου που διατηρεί τη δομή του). Οι τομείς τοπικά ταυτίζονται με συναρτήσεις. Η σύνδεση είναι ένα μέσο για να ορίζεται με συνέπεια η παράλληλη μετατόπιση σε μια πολλαπλότητα.

Με τη γεωμετρική κβάντωση [47], [48], [50] -την οποία θα δούμε αναλυτικά σύντομα- είναι γνωστό ότι αυτή η λογική δεν αποδίδει πραγματικές, μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της κβαντομηχανικής. Αυτό το πρόβλημα παρακάμπτεται ορίζοντας το χώρο Hilbert ως το σετ που στήνεται από τανυστικά γινόμενα των τομέων που αναφέρθηκαν με τομείς του δέματος ημιμορφών -οι δεύτεροι συμπεριφέρονται τοπικά ως τετραγωνικές ρίζες 2-μορφών. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζονται επιτυχώς χώροι Hilbert, που αντιστοιχούν σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της κβαντομηχανικής, από πραγματικές πολλαπλότητες. Σημειώνουμε ότι όπως υποδηλώνει και το όνομα, η γεωμετρική κβάντωση ξεκινά από κλασικές συναρτήσεις και αποδίδει τελεστές, ενώ εμείς ζητάμε το αντίστροφο. Αυτή η αντιστροφή θα περιγραφεί παρακάτω. Επίσης σημειώνουμε εδώ, ότι απ' όσο ξέρουμε, ποτέ οι ιδέες της γεωμετρικής κβάντωσης δεν έχουν αξιοποιηθεί για να επιλύσουν τις ασυνέπειες του ολοκληρώματος διαδρομών και αυτή είναι η πρώτη απόπειρα για κάτι τέτοιο.

Σε αντίθεση με τις πραγματικές πολλαπλότητες, στις μιγαδικές πολλαπλότητες η γεωμετρική κβάντωση αποδίδει μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της κβαντομηχανικής. Εμείς, απαιτώντας η κβαντομηχανική που κατασκευάζεται να είναι μη αναγωγίσιμη ανεξαρτήτως του αν η πολλαπλότητα εκφράζεται συναρτήσει πραγματικών ή μιγαδικών συντεταγμένων, θα ασχοληθούμε με την κβάντωση με ημιμορφές. Εδώ είναι προφανές ότι η πολλαπλότητα είναι ο χώρος που ζουν οι κλασικές συναρτήσεις, άρα και η κλασική Hamiltonian, οπότε είναι απλά ο χώρος των φάσεων. Συνήθως ως κυματοσυναρτήσεις ορίζονται οι ολομορφικά πολωμένοι μιγαδικοί γραμμικοί τομείς. Ολομορφική πόλωση σημαίνει φυσικώς ότι διαλέγουμε

τομείς που έχουν εξάρτηση μόνο από κάποιο μιγαδικό και όχι από το συζυγή του, και μαθηματικώς αυτό αποδίδεται από την απαίτηση η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς το συζυγή μιγαδικό να είναι 0 (η συναλλοίωτη παράγωγος είναι μια επέκταση της κατευθυνόμενης παραγώγου σε πολλαπλότητες):

$$D_{z^*}\Phi(z, z^*) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z^*} + iA_{z^*}\right)\Phi(z, z^*) = 0. \quad (5.1)$$

Η επίλυση αυτής δίνει $\Phi(z, z^*) = \phi(z)e^{-\frac{Y(z, z^*)}{2}}$, με το πρόσημο της σύνδεσης τέτοιο ώστε $Re(Y) \rightarrow \infty$ για $|z| \rightarrow \infty$.

Τότε ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$(\Phi_1, \Phi_2) = k \int \phi_1^*(z^*)\phi_2(z)e^{-Y}\mu(z), \quad (5.2)$$

όπου k είναι μια σταθερά κανονικοποίησης και $\mu(z)$ είναι το μέτρο ολοκλήρωσης.

Με τη διόρθωση ημιμορφής οι κυματοσυναρτήσεις και ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου μετατρέπονται αντίστοιχα στα:

$$\Phi(z, z^*) = \phi(z)e^{-\frac{Y(z, z^*)}{2}}\sqrt{dz}, \quad (5.3)$$

$$(\Phi_1, \Phi_2) = k \int \left(\frac{(\Phi_1^* \otimes \Phi_1^*) \wedge (\Phi_2 \otimes \Phi_2)}{\mu(z)}\right)^{1/2} \mu(z) \quad (5.4)$$

(ορίζουμε $\frac{a}{b} \times b = a$ για αριθμητή και παρονομαστή ίδιου βαθμού).

Αντικαθιστώντας τις μορφές των κυματοσυναρτήσεων σ' αυτή λαμβάνουμε:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = k \int \phi_1^*(z^*)\phi_2(z)e^{-Y}\left(\frac{dz^* \wedge dz}{\mu(z)}\right)^{1/2} \mu(z). \quad (5.5)$$

Μπορεί τα παραπάνω να φαίνονται υπερβολικά τεχνικά, αλλά προσέξτε τη συλλογιστική μας πορεία: Ξεκινάμε από μια πολλαπλότητα -αυτή θα δούμε σύντομα ότι δομικά εγχολώνεται στη σύνδεση. Κατόπιν κατασκευάζουμε τις μη αναγωγίσιμες αναπραστάσεις των κυματοσυναρτήσεων, με έναν τρόπο που εξαρτάται από τη σύνδεση, και καταφέρνουμε να ορίσουμε το εσωτερικό τους γινόμενο, το οποίο είναι στην καρδιά του χώρου Hilbert! Αυτό σημαίνει ότι καταφέραμε ξεκινώντας από μια πολλαπλότητα -το χώρο των φάσεων στο πρόβλημα που μας αφορά- να κατασκευάσουμε επάνω της ένα διανυσματικό χώρο -το χώρο Hilbert όπου ζουν οι κβαντικές κυματοσυναρτήσεις, εν προκειμένω. Επομένως μένει να συνδέσουμε και τα αντικείμενα που ζουν στον ένα χώρο με εκείνα που ζουν στον άλλο.

Οι πολλαπλότητες που εξετάζουμε είναι άρτιας διάστασης, λόγω του ότι στο χώρο των φάσεων κάθε συντεταγμένη συνοδεύεται από τη συζυγή της ορμή. Τέτοιες πολλαπλότητες εκφράζονται μέσω μιας κλειστής συμπλεκτικής μορφής -κλειστή σημαίνει $d\omega = 0$. Εδώ το σύμβολο d συμβολίζει την εξωτερική παράγωγο, που είναι η επέκταση της συνήθους διαφορίσης όταν έχουμε διαφορικές μορφές -πολύ απλά είναι μια επιχείρηση που ανεβάζει το βαθμό της μορφής κατά

1. Αποδεικνύεται ότι αυτή η επιχείρηση είναι μηδενοδύναμη που σημαίνει μαθηματικά ότι $d^2 f = 0$. Άρα μπορεί, πάντα να γραφεί $\omega = dA$ που τοπικά γράφεται $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Εδώ είναι χρήσιμη η αναλογία με τον ηλεκτρομαγνητισμό, που μας υποδεικνύει ότι το A μπορεί να θεωρηθεί ενά $U(1)$ πεδίο βαθμίδας, και συνεπώς σύνδεση.

Εκτός της εξωτερικής παραγώγου υπάρχει άλλη μια πράξη, το εσωτερικό γινόμενο i , που στο περιεχόμενο της διαφορικής γεωμετρίας είναι στην ουσία μια επιχείρηση που μειώνει το βαθμό μιας μορφής κατά 1. Αν ξ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε μια πολλαπλότητα, τότε για 1-μορφές -όπως είναι η σύνδεση- ισχύει $i_\xi A = \langle A, \xi \rangle$, με αυτή την πράξη να συμβολίζει το δυικό ζευγάρισμα της 1-μορφής και του διανυσματικού πεδίου (στην ειδική θεωρία της σχετικότητας είναι το γινόμενο εσωτερικό γινόμενο μεταξύ συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων ποσοτήτων).

Οι κανονικοί μετασχηματισμοί είναι αυτοί που αφήνουν τη συμπλεκτική μορφή αναλλοίωτη. Εχμεταλλούμενοι το ότι η εξωτερική παράγωγος είναι μηδενοδύναμη, είναι προφανές ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί δίνουν για το συμπλεκτικό δυναμικό $A' = A + d\Lambda$, που δεν είναι τίποτα άλλο απ' τους γνωστούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Και πάλι η αναλογία με τις γνώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού και της θεωρίας πεδίου είναι χρήσιμη για να κατανοήσουμε την ουσία αυτού. Τα πεδία γνωρίζουμε πώς μεταχηματίζονται υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας. Όμως εδώ το ανάλογο των πεδίων είναι φυσικά οι κυματοσυναρτήσεις, οπότε μιμούμαστε ακριβώς αυτό τον τρόπο μετασχηματισμού και ορίζουμε τη δράση των μετασχηματισμών βαθμίδας στις κυματοσυναρτήσεις ως (θεωρούμε σύστημα μονάδων όπου $\hbar = 1$ για να αποσυμφορίσουμε όσο γίνεται το φορμαλισμό)

$$\psi \rightarrow e^{-i\Lambda}\psi. \quad (5.6)$$

Θεωρούμε έναν κανονικό μετασχηματισμό και ελέγχουμε πώς αλλάζει τη σύνδεση. Η δράση του μετασχηματισμού δίνει από την παράγωγο Lie: $\delta A = \mathcal{L}_\xi A$, ξ το Hamiltonian διανυσματικό πεδίο που γεννά το μετασχηματισμό. Ο μαγικός τύπος του Cartan $\mathcal{L}_\xi = di_\xi + i_\xi d$, και το γεγονός ότι όπως εξηγήσαμε παραπάνω η μεταβολή της σύνδεσης είναι ίση με $d\Lambda$ δίνουν

$$d\Lambda = i_\xi(dA) + d(i_\xi A) = i_\xi \omega + d(\xi^\mu A_\mu) = df + d(\xi^\mu A_\mu), \quad (5.7)$$

όπου θεωρήσαμε $i_\xi \omega = df$.

Έτσι:

$$\Lambda = \xi^\mu A_\mu + f. \quad (5.8)$$

Τώρα μπορούμε να δούμε ακριβώς ποια είναι η καθαρή μεταβολή της κυματοσυνάρτησης υπό τη ροή ενός απειροστού διανυσματικού πεδίου. Θα αποτελείται από δύο μεταβολές: η πρώτη θα οφείλεται στη συνολική μεταβολή της κυματοσυνάρτησης -η κατευθυνόμενη παράγωγός της- και η άλλη θα αναιρεί τη μεταβολή που οφείλεται στη βαθμίδα:

$$\delta\psi = \xi^\mu \partial_\mu \psi - (-i\Lambda)\psi = (\xi^\mu \partial_\mu + i\Lambda)\psi \quad (5.9)$$

Όμως ξέρουμε ότι στην κβαντομηχανική η απειροστή μεταβολή της κυματοσυνάρτησης μπορεί να εκφραστεί μέσω της δράσης ενός τελεστή σε αυτήν επί έναν παράγοντα. Έτσι, ορίζουμε τον προκβαντικό τελεστή[49]:

$$\hat{P} = -i\xi^\mu \partial_\mu + \Lambda = -i(\xi^\mu D_\mu) + f \quad (5.10)$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$, η συναλλοίωτη παράγωγος. Αυτός ο τελεστής είναι πράγματι Hamiltonian διότι εκ κατασκευής είναι ο γεννήτορας των κανονικών μετασχηματισμών.

Ωστόσο, έχει το πολύ σοβαρό πρόβλημα ότι δεν αποδίδει μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις -ούτε καν για το ελεύθερο σωματίο! Με τον όρο αυτό εννοούμε οι κυματοσυναρτήσεις της κβαντομηχανικής να εξαρτώνται μόνο από μια συντεταγμένη -πχ μόνο από τη θέση ή μόνο από την ορμή. Το πρόβλημα μπορεί να γίνει κατανοητό και από την εξής σκοπιά: ξεκινήσαμε από την πλήρη πολλαπλότητα, οπότε συμμετέχουν και οι θέσεις και οι ορμές. Άρα, σε οποιαδήποτε ολοκληρώματα -όπως εκείνο του εσωτερικού γινομένου στο χώρο Hilbert- αν οι καταστάσεις εξαρτώνται πχ μόνο από τη θέση, το ολοκλήρωμα ως προς όλες τις δυνατές ορμές θα δίνει άπειρο. Αυτό το πρόβλημα πρέπει να διορθωθεί.

Εδώ εισάγεται η ιδέα της πόλωσης. Όπως αναφέραμε και πριν, αποδίδουμε στην κυματοσυναρτηση κι ένα τμήμα ημιμορφής -κάτι που τοπικά συμπεριφέρεται σαν τετραγωνική ρίζα κάποιου μέτρου ολοκλήρωσης. Ωστόσο, όπως είναι αναμενόμενο, αν αλλάξει το μέτρο ολοκλήρωσης -όπως γίνεται με τη διόρθωση ημιμορφών- αλλάζουν και οι συνθήκες που έχουν να κάνουν με ολοκληρώσεις. Συγκεκριμένα εδώ, ενώ με το αρχικό μέτρο ολοκλήρωσης οι προκβαντικοί τελεστές σέβονται τη συνθήκη ερμητιανότητας ως προς τη συνολική κλειστή μορφή, μόλις γίνει η διόρθωση των ημιμορφών δεν τη σέβονται.

Για να δούμε ότι όντως αυτή η μορφή δίνει μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε τη συνθήκη ερμητιανότητας. Όταν επιλεχθεί κάποια συγκεκριμένη πόλωση, λαμβάνουμε ένα νέο μέτρο ολοκλήρωσης J . Τότε η συνθήκη ερμητιανότητας γράφεται:

$$\int J\psi_1^*(\hat{P}\psi_2)dx - \int J(\hat{P}\psi_1)^*\psi_2dx = i \int J(\partial_\mu \xi^\mu + \xi^\mu \partial_\mu \ln J)\psi_1^*\psi_2dx. \quad (5.11)$$

Ορίζοντας τις κυματοσυναρτήσεις με τη διόρθωση ημιμορφής ως $\psi(x)\sqrt{J(x)}$ και νέους τελεστές $\hat{Q} = \hat{P} + \hat{u}$, δηλαδή προσθέτωντας έναν ακόμη -μη ερμητιανό- τελεστή \hat{u} στη μορφή των προκβαντικών, απαιτούμε:

$$\int J\psi_1^*(\hat{Q}\psi_2)dx = \int J(\hat{Q}\psi_1)^*\psi_2dx. \quad (5.12)$$

Είναι πολύ εύκολο να βρούμε ότι για $\hat{u} = -\frac{i}{2}\partial_\mu \xi^\mu$, εκπληρώνεται η απαίτηση ερμητιανότητας. Μένει μόνο μια μικρή λεπτομέρεια: η μορφή του τελεστή που έχουμε ως τώρα είναι τέτοια ώστε να δρα πριν την πόλωση, δηλαδή στις συνολικές κυματοσυναρτήσεις. Για να τον φέρουμε στην τελική μορφή του πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι πλέον δρα μόνο στο ολομορφικό μέρος αυτών. Αυτό εκπληρώνεται

από τη συνθήκη πόλωσης $(\partial_{z^*} + iA_{z^*})\psi = 0$ που δίνει $\psi = e^{-i \int dz^* A_{z^*}} \phi(z)$. Προφανώς αυτό δεν έχει καμία επιρροή στους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες του τελεστή. Η μόνη διαφορά θα επέλθει από τον όρο με τις μερικές παραγώγους. Αφού συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στο ολομορφικό μέρος, για τις συνολικές συναρτήσεις η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς τη συντεταγμένη z^* μηδενίζεται από τη συνθήκη πόλωσης. Έτσι ο πρώτος όρος του τελεστή μας γίνεται απλά $(\partial_z + iA_z)\psi = \phi(\partial_z + iA_z)e^{-i \int dz^* A_{z^*}} + e^{-i \int dz^* A_{z^*}}(\partial_z + iA_z)\phi$. Ο δεύτερος όρος δρα αποκλειστικά στην ολομορφική συνάρτηση, οπότε είναι στη μορφή που θέλουμε. Από την άλλη, λόγω της αντισυμμετρίας στον ορισμό της 2-μορφής ω , συνάγουμε ότι $\partial_z A_{z^*} = -\partial_{z^*} A_z$. Άρα $\partial_z(-i \int A_{z^*} dz^*) = iA_z$. Έτσι φτάνουμε στον τελικό κβαντικό τελεστή:

$$\hat{Q} = -i(\xi^\mu \partial_\mu) + 2\xi^\mu A_\mu + f - \frac{i}{2} \partial_\mu \xi^\mu \quad (5.13)$$

Αυτός δρα μόνο στο ολομορφικά πολωμένο μέρος της κυματοσυνάρτησης ενώ η διορθωση από τις ημιμορφές περιλαμβάνεται στον όρο $\partial_\mu \xi^\mu$. Αυτή την εξίσωση θα τη χρησιμοποιήσουμε παρακάτω ως διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για να λάβουμε τις κλασικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε τελεστές που μας ενδιαφέρουν. Να σημειωθεί εδώ ότι είναι ζωτικό για την ανάλυση το πεδίο να διατηρεί την πόλωση που επιλέξαμε, που μαθηματικώς σημαίνει η παράγωγος Lie του πεδίου πόλωσης να είναι γραμμικός συνδυασμός των πεδίων πόλωσης: $\mathcal{L}_\xi(\partial_\mu) = [\xi, \partial_\mu] = C_\mu^\nu \partial_\nu$. Επίσης τονίζουμε ότι για να λειτουργήσει η παραπάνω διαδικασία είναι απαραίτητο να αναφερόμαστε σε τελεστές που περιέχουν παραγώγους μέχρι πρώτη τάξη, μιας και μόνο αυτοί μπορούν να είναι ανάλογοι διανυσματικών πεδίων. Για υψηλότερης τάξης τελεστές απαιτούνται περαιτέρω διορθώσεις, που είναι υπερβολικά περίπλοκες. Άρα, φαίνεται σαν να καταφέραμε να βρούμε μια συσχέτιση μόνο για ένα πάρα πολύ μικρό σύνολο τελεστών -δε μπορούμε καν να αποφανθούμε για το μοντέλο Bose-Hubbard με αυτή την κατασκευή. Ευτυχώς, όπως θα δούμε αργότερα, καταφέραμε να παρακάμψουμε αυτό το ζήτημα με χρήση αναλυτικών τεχνικών στο ολοκλήρωμα διαδρομών. Τονίζουμε ωστόσο από τώρα ότι η ανταπόκριση που θα βρούμε εκεί, αναφέρεται αποκλειστικά σε επιχειρήσεις στο ολοκλήρωμα διαδρομών και δεν είναι απαραίτητα γενικότερης ισχύος. Η γεωμετρική κβάντωση φτάνει μέχρι εδώ, μέχρι τελεστές με παραγώγους πρώτης τάξης.

Εν συνεχεία θα αντιμετωπίσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα, όπου θα γίνει σαφέστερη η σημασία των παραπάνω, μέσω της εφαρμογής τους σε γνωστά συστήματα.

5.2 Κατασκευή στο συνεχές

Ο αντικειμενικός στόχος είναι να χρησιμοποιήσουμε τις ιδέες της γεωμετρικής κβάντωσης για να αποφανθούμε για το σύμβολο στη δράση του ολοκληρώματος διαδρομών. Για να συνδεθούμε με τις συνοχικές καταστάσεις, ορίζουμε για ένα αναίρετο κυματόνισμα $|\phi\rangle$ τη συνάρτηση $\phi(z) = \langle z|\phi\rangle$. Τότε η (5.5) γίνεται

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \langle \phi_1 | \left(k \int |z\rangle \langle z| e^{-Y} \left(\frac{dz^* \wedge dz}{\mu(z)} \right)^{1/2} \mu(z) \right) | \phi_2 \rangle. \quad (5.14)$$

Αυτό μας δίνει αυτομάτως την ανάλυση της ταυτότητας:

$$\hat{I} = k \int |z\rangle \langle z| e^{-Y} \left(\frac{dz^* \wedge dz}{\mu(z)} \right)^{1/2} \mu(z). \quad (5.15)$$

Εδώ θέλουμε να εξετάσουμε ένα μποζονικό σύστημα -ένα σύστημα που οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής του ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής του αρμονικού ταλαντωτή. Πρέπει να εντοπίσουμε ποια είναι η αντίστοιχη πολλαπλότητα όπου θα ζουν οι κλασικές συναρτήσεις που θα προκύψουν. Η άλγεβρα που ικανοποιούν οι τελεστές αυτοί πρέπει να είναι η άλγεβρα των γενητόρων των ισομετριών της πολλαπλότητας που ψάχνουμε, ώστε να υπάρχει ανταπόκριση μεταξύ τους. Από αυτό μπορούμε να καταλάβουμε ότι η πολλαπλότητα που ζητάμε είναι το Ευκλείδειο επίπεδο (θεωρούμε μία χωρική διάσταση για απλότητα, τα συμπεράσματα επεκτείνονται εντελώς φυσιολογικά σε περισσότερες διαστάσεις εφόσον δε χρησιμοποιούνται καμπυλόγραμμες συντεταγμένες). Το πλάτος μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη, γραμμένο στη γενικότερη μορφή -δηλαδή χωρίς να διαλέξουμε συγκεκριμένη διαδικασία διακριτοποίησης- στο διακριτό είναι

$$\langle z_b | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \hat{H}} | z_a \rangle = \int_{z_0=z_a}^{z_{N+1}^*=z_b^*} e^{-\Gamma} \prod_{j=1}^N \mu(z_j) \prod_{j=0}^N \langle z_{j+1} | z_j \rangle e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} H_j}, \quad (5.16)$$

όπου $\Gamma = -\ln \frac{\langle z_b | z_N \rangle \langle z_1 | z_a \rangle}{\langle z_{N+1} | z_N \rangle \langle z_1 | z_0 \rangle}$, ο επιφανειακός όρος και H_j το κλασικό σύμβολο στο διακριτό.

Οι όροι ανώτερης τάξης ως προς το πάχος ϵ αγνοούνται ακριβώς όπως εξηγήθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο. Αυτό είναι απαραίτητο για το συνεπή ορισμό του ολοκληρώματος διαδρομών, όπου παίρνουμε το όριο μετρήσιμα άπειρου γινομένου σε ένα μη μετρήσιμα άπειρο. Αυτό όπως είπαμε ισχύει για φραγμένους τελεστές και μόνο με τέτοιους θα ασχοληθούμε. Η δε συνεχής έκδοση είναι, γραμμένη στη γενικότερή της μορφή:

$$\langle z_b | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \hat{H}} | z_a \rangle = \int_{z_0=z_a}^{z_T^*=z_b^*} \mathcal{N} e^{-\Gamma} \mathcal{D}^2 z \sqrt{\text{Det} \|\omega(z(t))\|} e^{i \int_0^T dt (A_\mu \dot{z}^\mu - iH(z, z^*))}. \quad (5.17)$$

Εδώ, A_μ είναι το συμπλεκτικό δυναμικό, z^μ παραμετροποιεί τις δύο μιγαδικές συντεταγμένες, $\mathcal{D}^2 z \sqrt{\text{Det} \|\omega(z(t))\|}$ είναι το συναρτησιακό μέτρο ολοκλήρωσης και \mathcal{N} είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης, απαραίτητη στην περίπτωση που το συμπλεκτικό δυναμικό στον κινητικό όρο δεν αντιστοιχεί ακριβώς στο μέτρο ολοκλήρωσης που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα διαδρομών.

Ο κινητικός όρος προέρχεται αποκλειστικά από το εσωτερικό γινόμενο των καταστάσεων που χρησιμοποιούνται, οπότε μπορούμε υπεράνω πάσης αμφιβολίας να λάβουμε από τη μορφή του το συμπλεκτικό δυναμικό-σύνδεση στο επίπεδο της πολλαπλότητας, κάτι λογικό μιας και υποδικνύει τον τρόπο συγκόλλησης των φετών για να περάσουμε στο συνεχές:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle z_{j+1} | z_j \rangle = A_\mu \dot{z}^\mu. \quad (5.18)$$

Άρα λοιπόν είναι πλέον προφανές το τι προσπαθούμε να κάνουμε: θα ταυτίσουμε το κλασικό σύμβολο που εμφανίζεται στη δράση του συνεχούς με το κλασικό σύμβολο το οποίο υπό τη γεωμετρική κβάντωση με ημιμορφές χαρτογραφείται στην κβαντική Hamiltonian που αντιστοιχεί στο εν λόγω ολοκλήρωμα διαδρομών. Έτσι, ονομάζοντας \hat{Q} το χάρτη της γεωμετρικής κβάντωσης (ο οποίος είναι αντιστρέψιμος)

$$\hat{Q}^{-1}(\hat{H}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_j. \quad (5.19)$$

5.3 Εφαρμογή στις μποζονικές καταστάσεις

Σ' αυτή την ενότητα φτάνουμε στην καρδιά της μελέτης μας. Θα εφαρμόσουμε τα προηγούμενα με την ελπίδα να λάβουμε τη σωστή, όπως επαληθεύτηκε παραπάνω, ανταπόκριση μεταξύ του κλασικού και του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. Σημειώνουμε ότι στη λογική μας πορεία δε γίνεται καμία αναφορά στο διακριτό: πλέον δουλεύουμε απευθείας στο συνεχές, ακριβώς όπως θέλαμε. Επίσης, η ιδιότητα της κλασικής φυσικής να είναι αναλλοίωτη υπό κανονικούς μετασχηματισμούς εκφράστηκε παραπάνω σε ένα βαθύτερο μαθηματικό επίπεδο, εκδηλωμένη μέσω της ροής του Hamiltonian διανυσματικού πεδίου. Με το να εκφράσουμε αυτή την αναλλοιότητα υπό όρους διαφορικής γεωμετρίας επιτύχαμε να αποτινάξουμε από πάνω της οποιαδήποτε εξάρτηση από συγκεκριμένα συστήματα συντεταγμένων, αποδίδοντάς της οικουμενική ισχύ.

Ξεκινάμε από τον κινητικό όρο, ο οποίος όπως ξέρουμε προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ συνοχικών καταστάσεων, οπότε είναι πάντα ίδιος. Για τις μποζονικές συνοχικές καταστάσεις τον έχουμε βρει να είναι ίσος με

$$\frac{i}{2}(z^* \dot{z} - z \dot{z}^*). \quad (5.20)$$

Αυτό σημαίνει ότι η σύνδεση που αντιστοιχεί σε αυτόν -και άρα η σύνδεση στην αντίστοιχη πολλαπλότητα- είναι $A = \frac{i}{2}(z^* dz - z dz^*)$. Όπως είπαμε, ψάχνουμε καταστάσεις ολομορφικά πολωμένες, δηλαδή εξαρτώμενες μόνο από τη μεταβλητή z . Άρα, ορίζουμε ως συνοχικές καταστάσεις τις μη κανονικοποιημένες

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (5.21)$$

Πράγματι, η συνθήκη ολομορφικής πόλωσης δίνει:

$$(\partial_{z^*} + \frac{z}{2})\psi(z, z^*) = 0 \Rightarrow \psi(z, z^*) = e^{-\frac{zz^*}{2}} \phi(z). \quad (5.22)$$

Ο όρος που τις κανονικοποιεί τοποθετείται μέσα στην ταυτότητα, ώστε και πάλι να έχουμε ανάλυσή της σε συνοχικές καταστάσεις:

$$\hat{I} = \frac{1}{\pi} \int |z\rangle \langle z| e^{-|z|^2} dz \wedge dz^* \quad (5.23)$$

Σε μιγαδικές συντεταγμένες, το διανυσματικό πεδίο ισούται με

$$X_f = i \left(\frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*} \right), \quad (5.24)$$

οπότε

$$\xi^z = i \frac{\partial f}{\partial z^*}, \quad (5.25)$$

$$\xi^{z^*} = -i \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (5.26)$$

Εφόσον δουλεύουμε με ολομορφικά πολωμένες καταστάσεις, μας ενδιαφέρει να γράψουμε τη δράση των τελεστών μας στις -μη κανονικοποιημένες, αφού οι κανονικοποιημένες δεν είναι πολωμένες ολομορφικά- συνοχικές καταστάσεις συναρτήσεως μόνο του z . Τονίζουμε ότι η ανταπόκριση που θα γράψουμε παρακάτω δεν είναι αναπαράσταση των τελεστών, καθώς δεν ικανοποιεί την άλγεβρά τους. Είναι απλώς η δράση τους στις συνοχικές καταστάσεις.

Είναι πολύ εύκολο, χρησιμοποιώντας τις μη κανονικοποιημένες συνοχικές καταστάσεις και τον τρόπο δράσης των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής στις ιδιοκαταστάσεις του αριθμητικού τελεστή, να δούμε ότι

$$\hat{a} |z\rangle = z |z\rangle, \quad (5.27)$$

$$\hat{a}^\dagger |z\rangle = \frac{\partial}{\partial z} |z\rangle, \quad (5.28)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |z\rangle = z \frac{\partial}{\partial z} |z\rangle. \quad (5.29)$$

Επομένως θεωρούμε την ανταπόκριση

$$\hat{a}^\dagger \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.30)$$

$$\hat{a} \leftrightarrow z, \quad (5.31)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \leftrightarrow z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.32)$$

Όπως είπαμε αυτό δεν είναι αναπαράσταση των τελεστών, διότι θεωρώντας ότι είναι αναπαράσταση θα έπρεπε πχ $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, που εδώ δεν ισχύει.

Ξεκινώντας από τον τελεστή καταστροφής, η σχέση (5.13) -λόγω της κατασκευής της ο δείκτης μ αφορά μόνο την ολομορφική συντεταγμένη- γίνεται:

$$z = \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} - z^* \frac{\partial f}{\partial z^*} + f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*}. \quad (5.33)$$

Απαιτώντας αυτή να ισχύει για κάθε z , z^* βρίσκουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0 \Rightarrow f = f(z)$ και αντικαθιστώντας αυτό στην παραπάνω προκύπτει $f = z$.

Για τον τελεστή δημιουργίας πάλι από την (5.13):

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} - z^* \frac{\partial f}{\partial z^*} + f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*}. \quad (5.34)$$

Απαιτώντας αυτή να ισχύει για κάθε z , z^* βρίσκουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 1 \Rightarrow f = z^* + g(z)$ και αντικαθιστώντας αυτό στην παραπάνω προκύπτει $f = z^*$.

Για τον αριθμητικό τελεστή:

$$z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} - z^* \frac{\partial f}{\partial z^*} + f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*}. \quad (5.35)$$

Απαιτώντας αυτή να ισχύει για κάθε z , z^* βρίσκουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial z^*} = z \Rightarrow f = zz^* + g(z)$ και αντικαθιστώντας αυτό στην παραπάνω προκύπτει $f = zz^* - \frac{1}{2}$.

Έτσι, βρήκαμε τις ανταποκρίσεις:

$$\hat{a} \leftrightarrow z, \quad (5.36)$$

$$\hat{a}^\dagger \leftrightarrow z^*, \quad (5.37)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \leftrightarrow z^* z. \quad (5.38)$$

Η τελευταία είναι ακριβώς η σχέση που θέλαμε στο ολοκλήρωμα διαδρομών ώστε να παίρνουμε τα γνωστά αποτελέσματα για το απλό αρμονικό ταλαντωτή. Αργότερα θα επεκτείνουμε με αναλυτικές μεθόδους τα συμπεράσματά μας ώστε να μεγαλώσουμε το σετ των τελεστών τους οποίους μπορούμε να χαρτογραφήσουμε σε κλασικές συναρτήσεις που θα μπουν στη δράση στο ολοκλήρωμα διαδρομών. Τονίζουμε για μια ακόμη φορά ότι αυτή η μέθοδος είναι εφαρμόσιμη μόνο για τελεστές που η δράση τους στις συνοχικές καταστάσεις περιέχει παραγώγους μέχρι πρώτης τάξης.

5.4 Συνθήκες κβάντωσης και το Θεώρημα Groenewold

Η ανάγκη της σύνδεσης κβαντικών τελεστών και κλασικών συναρτήσεων δεν εμφανίζεται πρώτη φορά με τη συνειδητοποίηση των ασυνεπειών στο ολοκλήρωμα διαδρομών που αφορά συνοχικές καταστάσεις. Με την εμφάνιση κιόλας των τελεστών στην κβαντική μηχανική, έγινε σαφές ότι δεν είναι τόσο εύχρηστοι όσο οι συναρτήσεις και άρα υπήρχε η επιθυμία για σύνδεση των δύο αντικειμένων μέσω κάποιου χάρτη. Ο Dirac παρέθεσε τις εξής συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί

έναν τέτοιο χάρτη $\hat{Q}(f)$ για να είναι χρήσιμος και συνεπής:

1. Γραμμικότητα:

$$\hat{Q}(rf + g) = r\hat{Q}(f) + \hat{Q}(g), \quad (5.39)$$

f, g κλασικές συναρτήσεις, r βαθμωτό.

2. Ταυτότητα:

$$\hat{Q}(1) = \hat{I}. \quad (5.40)$$

3. Ερμητιανότητα:

$$\int d^{2n}q \sqrt{\omega} \psi_1^* \hat{Q}(f) \psi_2 = \int d^{2n}q \sqrt{\omega} (\hat{Q}(f) \psi_1)^* \psi_2. \quad (5.41)$$

4. Ορισμός ομοιομορφισμού αλγεβρών $\text{Lie}(\hbar = 1)$:

$$[\hat{Q}(f), \hat{Q}(g)] = i\hat{Q}(\{f, g\}). \quad (5.42)$$

5. Ορισμός μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης της κβαντομηχανικής.

Πράγματι, μια διαδικασία κβάντωσης που θα ικανοποιούσε αυτές τις συνθήκες είναι ακριβώς ό,τι χρειαζόμαστε, μιας και θα μπορούσαμε να βρούμε με χρήση των παραπάνω την ανταπόκριση τελεστών-συναρτήσεων. Ωστόσο το Θεώρημα Groenewold εξασφαλίζει ότι ένα σχήμα κβάντωσης που ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirac δεν είναι αυτοσυνεπές -δε μπορούν να ικανοποιηθούν όλες αυτές οι συνθήκες ταυτόχρονα για τελεστές κάθε τάξης [53]. Η απόδειξη είναι πολύ απλή και υποδεικνύει και το όριο μέχρι το οποίο αυτή η διαδικασία μπορεί να δουλέψει με συνέπεια. Το όριο αυτό είναι όταν φτάνουμε σε τελεστές που είναι πολυώνυμα τρίτης τάξης ως προς τις κανονικές συντεταγμένες. Από εκεί και πάνω οι συνθήκες του Dirac είναι ασυμβίβαστες μεταξύ τους, όπως θα δείξουμε ευθύς αμέσως.

Θεωρούμε δύο συζυγείς, κανονικές μεταβλητές δηλαδή η αγκύλη Poisson τους είναι $\{x, p\} = 1$ και βέβαια γι' αυτούς $\hat{Q}(x) = \hat{X}$, $\hat{Q}(p) = \hat{P}$. Σημειώνουμε ότι αυτές οι δυο δεν είναι κατ' ανάγκη οι τελεστές θέσης και ορμής, αλλά οποιεσδήποτε κανονικές μεταβλητές -οπότε μπορούν να είναι και οι μιγαδικές που οι αντίστοιχοι τελεστές τους είναι οι δημιουργίας και καταστροφής. Σύμφωνα με την ιδιότητα 4. $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ -για τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας ο μεταθέτης είναι βέβαια μονάδα, αλλά αυτό μπορεί φυσικά να φιξαριστεί με μια απλή αλλαγή στη σταθερά της αγκύλης Poisson, όπως άλλωστε προκύπτει από τον ορισμό των κλασικών μιγαδικών συντεταγμένων συναρτήσεων των κλασικών πραγματικών.

Αν βρούμε κάποιον τελεστή που μετατίθεται και με τους δύο τελεστές \hat{P} , \hat{X} τότε προφανώς μετατίθεται και με οποιοδήποτε όρο τους περιέχει σε οποιοδήποτε πλήθος και με οποιαδήποτε σειρά, και η συνθήκη της μη αναγωγισιμότητας σημαίνει ότι αυτός ο τελεστής είναι ανάλογος της μονάδας. Τώρα υπολογίζουμε:

$$[\hat{Q}(x^2), \hat{P}] = i\hat{Q}(\{x^2, p\}) = i\hat{Q}(2x) = 2i\hat{X} \quad (5.43)$$

και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο

$$[\hat{Q}(p^2), \hat{X}] = -2i\hat{P}. \quad (5.44)$$

Την ίδια στιγμή,

$$[\hat{X}^2, \hat{P}] = 2i\hat{X}, \quad (5.45)$$

$$[\hat{P}^2, \hat{X}] = -2i\hat{P}. \quad (5.46)$$

Είναι, δε, προφανές ότι λόγω της μη αναγωγισιμότητας

$$[\hat{Q}(x^2), \hat{X}] = [\hat{Q}(p^2), \hat{P}] = 0. \quad (5.47)$$

Άρα ο τελεστής $\hat{X}^2 - \hat{Q}(x^2)$ μετατίθεται με τους \hat{X} , \hat{P} οπότε είναι

$$\hat{X}^2 - \hat{Q}(x^2) = -c_1\hat{I} \quad (5.48)$$

και παρομοίως

$$\hat{P}^2 - \hat{Q}(p^2) = -c_2\hat{I}. \quad (5.49)$$

Από την άλλη

$$[\hat{Q}(x^2), \hat{Q}(p^2)] = i\hat{Q}(4xp) = 4i\hat{Q}(xp), \quad (5.50)$$

δηλαδή

$$[\hat{X}^2 + c_1\hat{I}, \hat{P}^2 + c_2\hat{I}] = 4i\hat{Q}(xp), \quad (5.51)$$

ή

$$\hat{Q}(xp) = \frac{\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}}{2}. \quad (5.52)$$

Επίσης,

$$[\hat{Q}(xp), \hat{Q}(p^2)] = i\hat{Q}(\{xp, p^2\}) = i\hat{Q}(2p^2) = 2i(\hat{P}^2 + c_2\hat{I}), \quad (5.53)$$

$$[\hat{Q}(xp), \hat{Q}(p^2)] = \left[\frac{\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}}{2}, \hat{P}^2 \right] = 2i\hat{P}^2. \quad (5.54)$$

Με αντιπαράβολή αυτών των δύο παίρνουμε $c_2 = 0$, και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε και ότι $c_1 = 0$.

Έτσι καταλήγουμε στο χάρτη

$$\hat{Q}(x^2) = \hat{X}^2, \quad (5.55)$$

$$\hat{Q}(p^2) = \hat{P}^2, \quad (5.56)$$

$$\hat{Q}(xp) = \frac{\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}}{2}. \quad (5.57)$$

Παρομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε

$$[\hat{Q}(x^3), \hat{P}] = [\hat{X}^3, \hat{P}] = 3i\hat{X}^2, \quad (5.58)$$

$$[\hat{Q}(p^3), \hat{X}] = [\hat{P}^3, \hat{X}] = -3i\hat{P}^2 \quad (5.59)$$

και άρα

$$\hat{Q}(x^3) = \hat{X}^3 + c_3\hat{I}, \quad (5.60)$$

$$\hat{Q}(p^3) = \hat{P}^3 + c_4\hat{I}. \quad (5.61)$$

Ακριβώς όπως πριν μπορούμε να βρούμε

$$\{x^3, xp\} = 3x^3 \quad (5.62)$$

άρα

$$3\hat{Q}(x^3) = -i[\hat{Q}(x^3), \hat{Q}(xp)] = -i[\hat{X}^3 + c_3\hat{I}, \frac{\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}}{2}] = 3\hat{X}^3 \quad (5.63)$$

και άρα $c_3 = 0$. Παρομοίως, $c_4 = 0$. Επίσης

$$\{x^3, p^2\} = 6x^2p, \quad (5.64)$$

οπότε

$$6\hat{Q}(x^2p) = -i[\hat{Q}(x^3), \hat{Q}(p^2)] = -i[\hat{X}^3, \hat{P}^2] = 3(\hat{X}^2\hat{P} + \hat{P}\hat{X}^2). \quad (5.65)$$

Ανταλλάζοντας τις δύο μεταβλητές και επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς, μπορούμε να δείξουμε και ότι

$$6\hat{Q}(p^2x) = 3(\hat{P}^2\hat{X} + \hat{X}\hat{P}^2) \quad (5.66)$$

Έτσι καταλήγουμε για τους τελεστές που είναι πολυώνυμα τρίτης τάξης:

$$\hat{Q}(x^3) = \hat{X}^3, \quad (5.67)$$

$$\hat{Q}(p^3) = \hat{P}^3, \quad (5.68)$$

$$\hat{Q}(p^2x) = \frac{1}{2}(\hat{P}^2\hat{X} + \hat{X}\hat{P}^2), \quad (5.69)$$

$$\hat{Q}(x^2p) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2\hat{P} + \hat{P}\hat{X}^2). \quad (5.70)$$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$9x^2p^2 = \{x^3, p^3\} = 3\{x^2p, p^2x\}, \quad (5.71)$$

οπότε

$$[\hat{Q}(x^3), \hat{Q}(p^3)] = 3[\hat{Q}(x^2p), \hat{Q}(p^2x)] \Rightarrow 4[\hat{X}^3, \hat{P}^3] = 3[\hat{X}^2\hat{P} + \hat{P}\hat{X}^2, \hat{X}\hat{P}^2 + \hat{P}^2\hat{X}], \quad (5.72)$$

η οποία είναι αναληθής. Επομένως όταν ασχοληθούμε με τελεστές πολυώνυμα τρίτης τάξης φτάνουμε σε ασυνέπειες.

Παρατηρήστε ότι για τους τελεστές δεύτερης τάξης βρήκαμε ακριβώς τις ανταποκρίσεις που μας έδωσε και ο χάρτης που προτείναμε. Πράγματι, αν στη θέση των μεταβλητών x, p βάλουμε τις μιγαδικές z, z^* , τότε οι παραπάνω ανταποκρίσεις δίνουν

$$\hat{Q}(z) = \hat{a}, \quad (5.73)$$

$$\hat{Q}(z^*) = \hat{a}^\dagger, \quad (5.74)$$

$$\hat{Q}(zz^*) = \frac{\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger}{2} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}. \quad (5.75)$$

Η διαφορά είναι βέβαια ότι στην προηγούμενη θεώρηση αυτή η ανταπόκριση διαθέτει στιβαρότατο μαθηματικό υπόβαθρο: την επικοινωνία μεταξύ ενός χώρου Hilbert και μιας κλασικής πολλαπλότητας -του χώρου των φάσεων. Αντίθετα, οι απαιτήσεις που έθεσε ο Dirac δεν είναι μαθηματικώς αλλά φυσικώς θεμελιωμένες, προέκυψαν καθαρά από την ανάγκη συνεπούς κβάντωσης ενός κλασικού συστήματος, χωρίς να φαίνεται ο βαθύτερος λόγος της ύπαρξής τους.

Η ανάγκη για κβάντωση κλασικών μεγεθών είναι από τα πρώτα χρόνια της κβαντικής μηχανικής τόσο έντονη, ώστε να έχει εμφανιστεί μια σειρά από τρόπους κβάντωσης. Φυσικά, όπως είδαμε, κανένας απ' αυτούς δε θα μπορούσε να ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του Dirac. Συνήθως η τακτική είναι να αρθεί κάποια από τις απαιτήσεις αυτές έτσι ώστε να προκύψει ένας συνεπής τρόπος κβάντωσης, ασθενέστερος φυσικά από τον "τέλειο". Ας θυμηθούμε τον προκβαντικό τελεστή που ορίζει η γεωμετρική κβάντωση. Όπως εξηγήσαμε αναλυτικά, εφόσον δεν έχει

γίνει ακόμα η πόλωση, δε δίνει μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της κβαντομηχανικής. Πράγματι, είναι ένας τελεστής ο οποίος ικανοποιεί τις υπόλοιπες τέσσερις συνθήκες, ωστόσο όχι αυτή της μη αναγωγισιμότητας, όπως είναι πολύ εύκολο να δειχτεί (για παράδειγμα για τον τελεστή καταστροφής ο προκβαντικός τελεστής που προκύπτει είναι ο $-\partial_{z^*} + \frac{z}{2}$ δηλαδή εξαρτάται και από τις δυο συντεταγμένες, οπότε η αναπαράσταση είναι αναγωγίσιμη -δε δίνει κυματοσυνάρτηση εξαρτώμενη μόνο από τη μία συντεταγμένη). Μετά την πόλωση η συνθήκη της μη αναγωγισιμότητας αποκαθίσταται. Το ότι η μέθοδος της γεωμετρικής κβάντωσης δεν επεκτείνεται για τελεστές-πολυώνυμα πάνω από δεύτερης τάξης δεν είναι πρόβλημα: όπως είδαμε, αυτό έτσι κι αλλιώς απαγορεύεται από το θεώρημα Groenewold. Είναι προφανέστατο από όλη την ανάλυση που έχει γίνει ως τώρα αλλά ας το επισημάνουμε εκ νέου εδώ: ρίζα όλων αυτών των προβλημάτων με τους τελεστές είναι η μη ισοδυναμία των διατάξεών τους. Κλασικά, οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις και μετατίθενται, ενώ οι κβαντομηχανικοί τελεστές ικανοποιούν κάποια άλγεβρα, που σημαίνει ότι δεν είναι όλες οι διατάξεις των τελεστών ισοδύναμες.

5.5 Ένας χάρτης για το ολοκλήρωμα διαδρομών

Όπως εξηγήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, δεν είναι εφικτή η συνεπής κβάντωση οποιοδήποτε τελεστή. Ωστόσο, όπως θα δείξουμε εδώ, ο φορμαλισμός του ολοκλήρωματος διαδρομών επιτρέπει μαθηματικούς χειρισμούς οι οποίοι αποδίδουν τα κλασικά σύμβολα τελεστών που, σύμφωνα με τα προηγούμενα, δεν είναι εφικτό να αποκβαντωθούν με συνέπεια. Τονίζουμε ότι σε αυτή την ενότητα θα εντοπίσουμε χαρτογραφήσεις κάποιων τελεστών σε κλασικά σύμβολα, όμως αυτή η επικοινωνία αφορά μόνο το ολοκλήρωμα διαδρομών, δηλαδή δεν είναι απαραίτητα γενικότερης ισχύος. Πράγματι, η χαρτογράφηση που θα προτείνουμε δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί ελαφρά τη καρδιά σε οποιοδήποτε πλαίσιο μελέτης εκτός αν δικαιολογηθεί και εκεί.

Η μέθοδος της γεωμετρικής κβάντωσης -ή αντίστοιχα η αποκβάντωση όπως την ορίσαμε στην (5.19) και περιγράφηκε νωρίτερα- μας οδήγησε σε μια συνταγή ανταπόκρισης τελεστών και κλασικών συμβόλων στην περίπτωση που οι τελεστές είναι μέχρι πρώτης τάξης ως προς τα διαφορικά -η γεωμετρική κβάντωση δε μπορεί να διαχειριστεί τάξεις μεγαλύτερες της πρώτης, οπότε και ο αντίστροφος χάρτης το ίδιο. Ξεκινάμε ορίζοντας έναν πιο γενικό χάρτη αποκβάντωσης από αυθαίρετους τελεστές σε κλασικά σύμβολα στο συνεχές:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_j = Q^{-1}(\hat{H}(z^*, z)), \quad (5.76)$$

όπου Q^{-1} είναι ένας γενικότερος χάρτης αποκβάντωσης ο οποίος, στην περίπτωση που αποδίδει τελεστές για τους οποίους μπορεί να εφαρμοστεί η κβάντωση με ημιμορφές, ταυτίζεται με το χάρτη \hat{Q}^{-1} που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 4.3. Ο εκθέτης -1 δεν υπονοεί ότι ο χάρτης αυτός είναι κατ' ανάγκη αντιστρέψιμος, παρά υπάρχει για να υποδείξει ότι ο εν λόγω χάρτης αποκβαντώνει τελεστές αντί να κβαντώνει συναρτήσεις. Θα προσπαθήσουμε να δούμε πώς δρα αυτός ο χάρτης σε

πολύωνυμα τελεστών που μπορούν να αποκβαντωθούν. Σημειώνουμε εδώ ότι εν γένει αυτός ο χάρτης δεν είναι γραμμικός ως προς το χώρο των τελεστών διότι κατά το φετάρισμα το κλασικό σύμβολο ενδέχεται να αποκτήσει συνεισφορές λόγω όρων που προέκυψαν από μεταθέτες.

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\text{tr}[\hat{T}e^{\pm i \int_0^T dt \hat{H}^2}] \sim \text{tr}\left[\int \mathcal{D}\xi e^{\mp \frac{i}{4} \int_0^T dt \xi^2 + i \int_0^T dt \xi \hat{H}}\right] \sim \int \mathcal{D}\xi e^{\mp \frac{i}{4} \int_0^T dt \xi^2} \text{tr}[e^{i \int_0^T dt \xi \hat{H}}] \quad (5.77)$$

και η γενίκευσή της για θετικούς ακέραιους k

$$\begin{aligned} \text{tr}[\hat{T}e^{-i \int_0^T dt \hat{H}^k}] &= \text{tr}[e^{-i \int_0^T dt [\frac{1}{2}(\hat{H} + \hat{H}^{k-1})^2 - \frac{1}{2}\hat{H}^2 - \frac{1}{2}\hat{H}^{2k-2}]}] \\ &\sim \text{tr}\left[\int \mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2 \mathcal{D}\xi_3 e^{\frac{i}{4} \int_0^T dt (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)} e^{\frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^T dt (\xi_1 + \xi_2) \hat{H} + \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^T dt (\xi_1 + \xi_3) \hat{H}^{k-1}}\right]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Αυτές ισχύουν για κάθε τελεστή που διαθέτει πλήρες σετ ιδιοκαταστάσεων. Με διαδοχική χρήση της δεύτερης εξ αυτών μπορούμε να δούμε ότι για κάθε Ερμητιανό τελεστή που μπορεί να αποκβαντωθεί ισχύει

$$\mathcal{Q}^{-1}(\hat{H}^k) = (\hat{\mathcal{Q}}^{-1}(\hat{H}))^k. \quad (5.79)$$

Αυτή μας δίνει το κλασικό σύμβολο που αντιστοιχεί στον τελεστή \hat{H}^k στο πλαίσιο της συνεχούς έκδοσης του ολοκληρώματος διαδρομών.

Αν, δε, έχουμε ένα γραμμικό συνδυασμό τελεστών οι οποίοι μπορούν να αποκβαντωθούν επιτυχώς, η γραμμικότητα του χάρτη δεν είναι δεδομένη και για τη διαχείριση τέτοιων ποσοτήτων απαιτούνται πιο βαθυστόχαστες μέθοδοι. Ωστόσο, η γραμμικότητα ισχύει όταν όλοι οι τελεστές στο γραμμικό συνδυασμό μετατίθενται μεταξύ τους, αφού σε αυτή την περίπτωση η παραπάνω κατασκευή μπορεί να πραγματοποιηθεί για κάθε τελεστή ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

Η ικανότητά μας να εντοπίσουμε το κλασικό σύμβολο ενός ερμητιανού τελεστή που είναι δύναμη κάποιου άλλου τελεστή το κλασικό σύμβολο του οποίου είναι γνωστό, σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα του χάρτη για τελεστές που μετατίθενται, μας επιτρέπει να μελετήσουμε μια κατηγορία Hamiltonians ιδιαίτερης φυσικής σημασίας: εκείνων που είναι γραμμικός συνδυασμός οποιωνδήποτε θετικών ακέραιων δυνάμεων του αριθμητικού τελεστή.

Ας επαληθεύσουμε ότι τα παραπάνω οδηγούν στη σωστή συνάρτηση επιμερισμού μέσω του υπολογισμού της με ολοκλήρωμα διαδρομών. Πράγματι, θεωρώντας τη μπεζονική Hamiltonian

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^N c_n (\hat{a}^\dagger \hat{a})^n, \quad (5.80)$$

όπου c_n είναι πραγματικές σταθερές και N είναι αυθαίρετος θετικός ακέραιος, σύμφωνα με τα παραπάνω το κλασικό σύμβολο που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στο ολοκλήρωμα διαδρομών είναι

$$H_{cl} = \sum_{n=0}^N c_n (|z|^2 - \frac{1}{2})^n. \quad (5.81)$$

Η συνάρτηση επιμερισμού ορισμένη με ολοκλήρωμα διαδρομών -θα την υπολογίσουμε στο φανταστικό χρόνο, αλλά φυσικά μπορούμε πάντα να περάσουμε στον πραγματικό όπως έχουμε εξηγήσει- είναι

$$Z = \int_{pbc} \mathcal{D}z^* \mathcal{D}z \exp[-\int_0^\beta d\tau (\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} + H_{cl})] = \int_{pbc} \mathcal{D}z^* \mathcal{D}z \exp[-\int_0^\beta d\tau (\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} + \sum_{n=0}^N c_n (|z|^2 - \frac{1}{2})^n)]. \quad (5.82)$$

Εισάγουμε τις ταυτότητες [44], [45], [46]

$$1 = \int \mathcal{D}\zeta \delta[\zeta - |z|^2], \quad (5.83)$$

$$\delta[\zeta - |z|^2] = \int \mathcal{D}\sigma e^{-i \int_0^\beta d\tau \sigma (\zeta - |z|^2)} \quad (5.84)$$

και λαμβάνουμε

$$Z = \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}\sigma e^{-\int_0^\beta d\tau [i\sigma \zeta + \sum_{n=0}^N c_n (\zeta - \frac{1}{2})^n]} \int_{pbc} \mathcal{D}^2 z \exp[-\int_0^\beta d\tau (\frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{2} - i\sigma |z|^2)]. \quad (5.85)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι γνωστό από το Τρίτο κεφάλαιο, επομένως χρησιμοποιούμε κατευθείαν την τιμή του και προκύπτει:

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}\sigma e^{-\int_0^\beta d\tau [i\sigma (\zeta - m - \frac{1}{2}) + \sum_{n=0}^N c_n (\zeta - \frac{1}{2})^n]}. \quad (5.86)$$

Το ολοκλήρωμα διαδρομών ως προς το βοηθητικό πεδίο σ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μέσω της ταυτότητας από την οποία εισήχθη. Το αποτέλεσμα είναι $\delta[\zeta - m - \frac{1}{2}]$, δηλαδή το ζ παίρνει την τιμή $m + \frac{1}{2}$, κάτι που επιτρέπει να γίνει και η τελευταία ολοκλήρωση. Έτσι προκύπτει το αποτέλεσμα

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta \sum_{n=0}^N c_n m^n}. \quad (5.87)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι φυσικά το σωστό, όπως μπορεί πολύ εύκολα να ελεγχθεί από τον εναλλακτικό υπολογισμό της συνάρτησης επιμερισμού. Πράγματι, προφανώς οι ιδιοτιμές του αριθμητικού τελεστή είναι απλώς οι μη αρνητικοί ακέραιοι, οπότε οι ιδιοτιμές της γενικής μας Hamiltonian είναι οι $\sum_{n=0}^N c_n m^n$,

όπου $m = 0, 1, \dots, \infty$ και άρα η συνάρτηση επιμερισμού είναι ακριβώς αυτή που μόλις βρήκαμε. Έτσι, επαληθεύουμε και τα αποτελέσματα του Τρίτου κεφαλαίου -η Hamiltonian Bose-Hubbard είναι απλώς μια υποπερίπτωση της πολύ γενικής μορφής που μόλις μελετήσαμε, και φυσικά αντικαθιστώντας με τις αντίστοιχες τιμές τις αυθαίρετες σταθερές μας, βρίσκουμε σωστά και τη δική της συνάρτηση επιμερισμού.

Ανακεφαλαιώνουμε τα παραπάνω: λαμβάνοντας υπ' όψιν την ικανότητα εύρεσης του κλασικού συμβόλου κάποιας δύναμης Ερμητιανού τελεστή το κλασικό σύμβολο του οποίου είναι γνωστό, καθώς και τη γραμμικότητα του χάρτη για τελεστές που μετατίθενται, έχουμε καταφέρει να βρούμε μια συνταγή που αποδίδει το κλασικό σύμβολο που πρέπει να μπει στο ολοκλήρωμα διαδρομών για μια ευρεία γκάμα τελεστών. Συγκεκριμένα, η ανταπόκριση για το γενικότερο δυνατό τελεστή που έχουμε βρει είναι:

$$\hat{F} = \sum_{j=0}^N l_j (k \hat{a}^\dagger \hat{a} + c \hat{a} + c^* \hat{a}^\dagger + d)^j \leftrightarrow \mathcal{Q}^{-1}(\hat{F}) = \sum_{j=0}^N l_j \left[k(|z|^2 - \frac{1}{2}) + cz + c^* z^* + d \right]^j \quad (5.88)$$

όπου k, l_j, d πραγματικοί αριθμοί, c μιγαδικός. Σημειώνεται ότι όντως πρόκειται για ανταπόκριση, διότι για αυτούς τους τελεστές ο χάρτης είναι αντιστρέψιμος. Ο λόγος είναι ότι οποιοδήποτε τελεστές στη μορφή του πρώτου μέλους της παραπάνω ισότητας μετατίθενται, ενώ οποιοσδήποτε συναρτήσεις στη μορφή του δεύτερου μέλους της έχουν μηδενική αγκύλη Poisson. Επομένως, η συνθήκη ισομορφισμού μεταξύ των αλγεβρών Lie -η οποία εμφάνισε τις ασυνέπειες στο Θεώρημα Groenewold- εδώ ισχύει τετριμμένα, οπότε ο χάρτης για αυτές τις μορφές σέβεται τις συνθήκες του Dirac για συνεπή κβάντωση.

Όμως εκτός αυτού, ενδιαφερόμαστε και για συστήματα που οι Hamiltonians τους περιέχουν αλληλεπιδράσεις. Οποιοσδήποτε έχει έστω και λίγη εξοικείωση με συστήματα κβαντικής μηχανικής γνωρίζει πολύ καλά ότι συχνά οι υπολογισμοί για αυτά είναι πολύ δύσκολο να γίνουν με αναλυτικές μεθόδους. Τέτοια συστήματα είναι φερ' ειπείν αυτά που περιγράφουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων, θερμικά συστήματα κλπ. Επίσης, μας αφορούν και συστήματα οι παράμετροι των οποίων εξαρτώνται από το χρόνο. Την ίδια στιγμή, η εξέλιξη αυτών των συστημάτων δε μπορούσε να εκφραστεί μέσω της γλώσσας των ολοκληρωμάτων διαδρομών, με αποτέλεσμα να μη μελετώνται καθόλου ή να μελετώνται με πάρα πολλές δυσκολίες. Είναι φυσικά ευνόητο το πόσο σημαντικό είναι να μπορεί κανείς να διαχειριστεί τέτοια συστήματα. Το ενδιαφέρον από τη σκοπιά της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης είναι τεράστιο, το ίδιο και από αυτή της θεωρίας πεδίου. Όσον αφορά την κβαντική πληροφορική, η ικανότητα να μελετήσει κανείς συστήματα που περιέχουν αλληλεπιδράσεις είναι εμβληματικής σημασίας, μιας και θα μπορούσαν να ληφθούν απαντήσεις για φαινόμενα μείζονος σημασίας όπως η αποσυνοχή, η κβαντική διεμπλοκή, η ικανότητα μετεγγραφής καταστάσεων, η τοπολογική προστασία κα. Επίσης, θα γίνει εφικτή μια συνεπής μελέτη συστημάτων πεπερασμένης θερμοκρασίας, μιας και αυτά δεν είναι τίποτα άλλο παρά συστήματα μηδενικής θερμοκρασίας που αλληλεπιδρούν με κάποιο θερμικό λουτρό. Επομένως, μια συνεπής συνταγή χαρτογράφησης τελεστών σε κλασικές συναρτήσεις στο ολοκλήρωμα διαδρομών

εξυπηρετεί, μεταξύ άλλων, στην εύρεση μεθόδων αποθήκευσης και χειραγώγησης της κβαντικής πληροφορίας.

Η μέθοδος που αναπτύξαμε επιτρέπει τη μελέτη μιας ευρείας γκάμας συστημάτων που περιέχουν όρους αλληλεπίδρασης. Πράγματι, αν έχουμε μια σειρά από όρους που αντιστοιχούν σε διαφορετικά συστήματα για τους οποίους μπορούμε να βρούμε το κλασικό σύμβολο που πρέπει να τοποθετηθεί στη δράση, τότε μπορούμε να διαχειριστούμε και το τανυστικό γινόμενο τους. Επομένως μπορούμε να βρούμε με συνέπεια το κλασικό σύμβολο όρων του τύπου:

$$\hat{O} = \sum_{l=1}^N \omega_{12\dots k}^l \hat{O}^{l1} \otimes \hat{O}^{l2} \dots \otimes \hat{O}^{lk}, \quad (5.89)$$

όπου το σύμβολο \hat{O}^{lj} υποδηλώνει κάποιον τελεστή του j -οστού συστήματος που βρίσκεται στον l -οστό όρο. Οι τελεστές που έχουν να κάνουν με διαφορετικά υποσυστήματα δρουν εξ ορισμού σε διαφορετικούς χώρους Hilbert, οπότε αν όλοι οι τελεστές ενός συγκεκριμένου υποσυστήματος που εμφανίζονται στη Hamiltonian μπορούν να αποκβαντωθούν ταυτόχρονα, μπορούμε να γράψουμε για το χάρτη μας:

$$\mathcal{Q}^{-1}(\hat{O}) = \sum_{l=1}^N \omega_{12\dots k}^l \mathcal{Q}^{-1}(\hat{O}^{l1}) \mathcal{Q}^{-1}(\hat{O}^{l2}) \dots \mathcal{Q}^{-1}(\hat{O}^{lk}). \quad (5.90)$$

Αυτό προφανώς διότι για δύο τελεστές που δρουν σε διαφορετικούς χώρους Hilbert μπορούμε να δούμε ότι:

$$\mathcal{Q}^{-1}(\hat{O}^1 \hat{O}^2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\langle z_j^1 | \otimes \langle z_j^2 |)(\hat{O}^1 \otimes \hat{O}^2)(|z_j^1\rangle \otimes |z_j^2\rangle)}{(\langle z_j^1 | \otimes \langle z_j^2 |)(|z_j^1\rangle \otimes |z_j^2\rangle)}. \quad (5.91)$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να μελετήσουμε όρους αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο διαφορετικών υποσυστημάτων που περιγράφονται από μποζονικούς τελεστές. Μια μορφή ιδιαίτερα χρήσιμη που περιγράφει την ανταλλαγή μποζονικών βαθμών ελευθερίας μεταξύ των δύο υποσυστημάτων είναι η (τα σύμβολα a , b είναι οι ετικέτες των μποζονικών τελεστών των δύο υποσυστημάτων):

$$\hat{O} = c \hat{a}^\dagger \otimes \hat{b} + c^* \hat{a} \otimes \hat{b}^\dagger. \quad (5.92)$$

Επίσης, όπως εξηγήσαμε, μπορούμε να διαχειριστούμε και όρους που περιέχουν οποιαδήποτε δύναμη του παραπάνω τελεστή. Περεταίρω, με πιο περίπλοκες τεχνικές αναγωγής στην πρώτη δύναμη, αλλά στην ίδια λογική που το κάναμε πριν, μπορούν να βρεθούν τα κλασικά σύμβολα όρων της μορφής:

$$\hat{O} = c \hat{a}^{\dagger l} \otimes \hat{b}^l + c^* \hat{a}^l \otimes \hat{b}^{\dagger l}. \quad (5.93)$$

Η δε γενικότερη μορφή που μπορούμε να μελετήσουμε σύμφωνα με όσα είπαμε, είναι η

$$\hat{O} = \sum_{l=1}^N \omega_l \otimes_{j=1}^k (k_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + c_j \hat{a}_j + c_j^* \hat{a}_j^\dagger + d_j)^{n_{lj}}, \quad (5.94)$$

όπου ο δείκτης j αναφέρεται στο εκάστοτε υποσύστημα, ο δείκτης l στον όρο αλληλεπίδρασης και ο n_{lj} στη δύναμη του j -οστού υποσυστήματος στον l -οστό όρο.

Ανακεφαλαιώνοντας, κατορθώσαμε να επεκτείνουμε τις ανταποκρίσεις μεταξύ Hamiltonians μποζονικών συστημάτων και κλασικών ποσοτήτων που πρέπει να εισέλθουν στη δράση στο ολοκλήρωμα διαδρομών, σε ένα εύρος που, απ' όσο γνωρίζουμε, υπερβαίνει το εύρος που έχει επιτύχει οποιαδήποτε άλλη μελέτη στο παρελθόν. Στο επόμενο κεφάλαιο ακολουθώντας ακριβώς τις ίδιες θεωρήσεις, θα μελετήσουμε συστήματα spin.

Κεφάλαιο 6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ SPIN

Τα συστήματα spin είναι εμβληματικής σημασίας στη σύγχρονη φυσική. Οι εφαρμογές τους στη φυσική συμπυκνωμένης ύλης, στην πυρηνική φυσική, στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων και στη θεωρία πεδίου καθιστούν αδήριτη την ανάγκη μελέτης τους και την εύρεση εργαλείων για υπολογισμό χρήσιμων ποσοτήτων που τα αφορούν. Την ίδια στιγμή, αποτελούν πρώτης τάξεως υποψήφιες πλατφόρμες για πραγμάτωση κβαντικού υπολογισμού, κάτι που εντείνει το ενδιαφέρον για εύρεση μεθόδων μελέτης ολοκληρωμάτων διαδρομών που τα αφορούν. Παρακάτω θα επαναλάβουμε ακριβώς τα ίδια βήματα που κάναμε στα προηγούμενα κεφάλαια, για να συναντήσουμε ακριβώς τα ίδια προβλήματα που είδαμε και στους μποζονικούς ταλαντωτές, ενώ θα εφαρμόσουμε το χάρτη μας για να βρούμε την κλασική ποσότητα που πρέπει να τοποθετήσουμε στη δράση, αναλόγως της Hamiltonian-γραμμής συναρτήσε βαθμών ελευθερίας spin αυτή τη φορά- που μας δίνεται.

6.1 Η συνάρτηση επιμερισμού ενός απλού συστήματος

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί αν τα ίδια προβλήματα που συναντήθηκαν στους μποζονικούς ταλαντωτές θα εμφανιστούν και όταν μελετάμε ολοκληρώματα διαδρομών που αφορούν συστήματα spin. Πριν καν γίνει οποιοσδήποτε υπολογισμός, υπάρχει ένα μαθηματικό τέχνασμα που αυτομάτως απαντά σε αυτή την ερώτηση καταφατικά. Αυτό είναι ο μετασχηματισμός Holstein-Primakoff [57] ο οποίος συνδέει τους βαθμούς ελευθερίας spin s με μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας, χρησιμοποιώντας έναν υπόχωρο των καταστάσεων των δεύτερων, διάστασης ίσης με εκείνης των καταστάσεων των πρώτων:

$$\hat{S}^z = \hbar(s - \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (6.1)$$

$$\hat{S}^+ = \hbar \sqrt{2s - \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a}, \quad (6.2)$$

$$\hat{S}^- = \hbar \hat{a}^\dagger \sqrt{2s - \hat{a}^\dagger \hat{a}}. \quad (6.3)$$

Εδώ οι \hat{a}^\dagger , \hat{a} είναι οι μποζονικοί τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αντίστοιχα, ενώ οι \hat{S}^x , \hat{S}^y , \hat{S}^z είναι οι τελεστές spin στις τρεις διευθύνσεις του χώρου και $\hat{S}^\pm = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y$. Από τον πρώτο μετασχηματισμό καταλαβαίνουμε ότι αφού ο τελεστής \hat{S}^z είναι διάστασης $2s + 1$ τέτοιας διάστασης πρέπει να είναι και ο αριθμητικός τελεστής, ο οποίος όμως στην πραγματικότητα είναι άπειρης διάστασης, οπότε πράγματι αυτός ο μετασχηματισμός μας περιορίζει σε κάποιον υπόχωρο του. Δε θα ασχοληθούμε με την απόδειξη αυτού το μετασχηματισμού. Αρκούμαστε στο να αναφέρουμε ότι προκύπτει από την ανάγκη να ικανοποιούνται ταυτόχρονα η άλγεβρα των μποζονικών τελεστών και εκείνη των στροφορμών $[\hat{S}^i, \hat{S}^j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}^k$, ϵ_{ijk} είναι το σύμβολο Levi-Civita -ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τρίτης τάξης. Είναι κατανοητό ότι εφόσον ξέρουμε ότι ο αριθμητικός τελεστής παρουσιάζει προβλήματα στο ολοκλήρωμα διαδρομών του, και αφού αυτός συνδέεται με τους τελεστές spin, παρόμοια προβλήματα θα πρέπει να συναντήσουμε και στο ολοκλήρωμα διαδρομών για το spin.

Κάποια βασικά εργαλεία για τη μελέτη μας: υπάρχουν και για τα συστήματα spin τελεστές που κάνουν την ανάλογη δουλειά με τους μποζονικούς -δηλαδή να ανεβοκατεβάζουν τις καταστάσεις του αριθμητικού τελεστή, το ανάλογο του οποίου είναι εδώ ο τελεστής \hat{S}_z . Αυτοί δίνονται από τους:

$$\hat{S}^\pm = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y. \quad (6.4)$$

Η δράση τους στις ιδιοκαταστάσεις $|s, m\rangle$, m η ιδιοτιμή του τελεστή \hat{S}^z , είναι:

$$\hat{S}^\pm |s, m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s, m \pm 1\rangle. \quad (6.5)$$

Οι κανονικοποιημένες συνοχικές καταστάσεις spin, [14], [42] κατ' αναλογία με τις μποζονικές, δίνονται από τον τύπο:

$$|z\rangle = \frac{1}{(1 + |z|^2)^s} \sum_{j=-s}^s \sqrt{\frac{(2s)!}{(s-j)!(s+j)!}} z^{s-j} |s, j\rangle = \frac{1}{(1 + |z|^2)^s} e^{z\hat{S}^-} |s, s\rangle. \quad (6.6)$$

Αυτές οι συνοχικές καταστάσεις έχουν όλες τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες των μποζονικών: αναλύουν την ταυτότητα και στήνουν υπερπλήρη βάση, κάτι που μπορεί να αποδείξει κανείς εύκολα:

$$\frac{2s+1}{\pi} \int \frac{d^2 z}{(1 + |z|^2)^2} |z\rangle \langle z| = \hat{I}, \quad (6.7)$$

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \frac{(1 + z_1^* z_2)^{2s}}{(1 + |z_1|^2)^s (1 + |z_2|^2)^s}. \quad (6.8)$$

Ας ξεκινήσουμε από τον απλούστερο δυνατό σύστημα spin, δηλαδή από την χβαντική Hamiltonian $\hat{H} = \omega \hat{S}^z$. Αυτή περιγράφει ένα σωματίο με spin s υπό την επίδραση σταθερού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, τη διεύθυνση του οποίου

6.1. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΠΙΜΕΡΙΣΜΟΥ ΕΝΟΣ ΑΠΛΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 63

έχουμε ταυτίσει με τον άξονα z . Θέλουμε να εξετάσουμε αυτό το πρόβλημα υπό το πρίσμα των συνοχικών καταστάσεων. Το πλάτος μετάβασης σύμφωνα με όσα είπαμε στα προηγούμενα κεφάλαια είναι (στο συνεχές):

$$\langle z_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | z_a \rangle = \int_{z(0)=z_a}^{z^*(T)=z_b^*} \mathcal{D}\mu(z) e^{\Gamma} e^{iS}, \quad (6.9)$$

όπου

$$\mathcal{D}\mu(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N+1} \frac{2s+1}{\pi} \int \frac{d^2 z_n}{(1+|z_n|^2)^2} \quad (6.10)$$

είναι το σύμβολο ολοκλήρωσης,

$$\Gamma = \text{sln} \frac{(1+z_b^* z(T))(1+z_a z^*(0))}{(1+|z_b|^2)(1+|z_a|^2)} \quad (6.11)$$

είναι ο επιφανειακός όρος και

$$S = \int_0^T dt \left(is \frac{z^* \dot{z} - z \dot{z}^*}{1+|z|^2} - H/\hbar \right) \quad (6.12)$$

είναι η δράση.

Η αλλαγή στη μορφή του κινητικού όρου της δράσης οφείλεται στη μορφή του εσωτερικού γινομένου συνοχικών καταστάσεων spin -η βαθύτερη αιτία είναι ότι οι καταστάσεις spin δε ζουν στο επίπεδο αλλά σε σφαίρα. Είναι κατανοητό ότι αυτό αυξάνει την πολυπλοκότητα των υπολογισμών, οπότε δε θα τους καταγράψουμε ενδελεχώς εδώ. Η λογική που θα ακολουθήσουμε είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που ακολουθήσαμε για τον υπολογισμό του πλάτους μετάβασης στον αρμονικό ταλαντωτή: θα χωρίσουμε το πεδίο σε δύο μέρη, ένα κλασικό -στο οποίο θα αποδώσουμε τις συνοριακές συνθήκες και το οποίο θα είναι η λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange- και ένα που θα περιγράφει τις διακυμάνσεις. Φυσικά είμαστε και πάλι αντιμέτωποι με το ερώτημα τι πρέπει να βάλουμε στο σύμβολο της Hamiltonian στη δράση. Όπως είδαμε στη μελέτη του αρμονικού ταλαντωτή, αν ορίσουμε το ολοκλήρωμα διαδρομών στο συνεχές ακολουθώντας τη συνηθισμένη πορεία, το σύμβολο που προκύπτει είναι $H = \langle z | \hat{H} | z \rangle$. Σ' αυτή την περίπτωση, για την εν λόγω Hamiltonian παίρνουμε

$$H = \omega s \hbar \left(1 - \frac{2|z|^2}{1+|z|^2} \right). \quad (6.13)$$

Οι δε κλασικές λύσεις προκύπτουν

$$z_c = z_a e^{i\omega t}, \quad (6.14)$$

$$z_c^* = z_b^* e^{i\omega(T-t)}. \quad (6.15)$$

Με όλα αυτά ανά χείρας, το πλάτος μετάβασης γίνεται:

$$\langle z_b | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | z_a \rangle = e^{-i\omega Ts} \frac{(1 + z_b^* z_a)^{2s}}{(1 + |z_a|^2)^s (1 + |z_b|^2)^s} \delta, \quad (6.16)$$

όπου δ είναι το ολοκλήρωμα διαδρομών στις διακυμάνσεις

$$\delta = \int_{\eta(0)=\eta(T)=0} \mathcal{D}^2 \eta e^{i \int_0^T dt \left(\frac{i(\eta^* \dot{\eta} - \dot{\eta}^* \eta)}{2} + \omega |\eta|^2 \right)}. \quad (6.17)$$

Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα διαδρομών πάνω στο πεδίο των διακυμάνσεων είναι ακριβώς ίδιο με εκείνο που θα προέκυπτε για έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή συχνότητας $-\omega$ αν ζητούσαμε το πλάτος μετάβασης από το κενό της θεωρίας στον εαυτό του, ήτοι $\langle 0 | e^{+iT\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})} | 0 \rangle = \delta!$ Επομένως, βρίσκουμε πολύ εύκολα $\delta = e^{i\omega T/2}$. Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση επιμερισμού για αυτό το σύστημα:

$$Z' = \frac{2s+1}{\pi} \int \frac{d^2 z}{(1+|z|^2)^2} \langle z | e^{-iT\hat{H}/\hbar} | z \rangle = e^{i\omega T/2} \sum_{j=-s}^s e^{-i\omega T j}. \quad (6.18)$$

Όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση επιμερισμού και απευθείας από τις ενέργειες. Με αυτό τον τρόπο, είναι προφανές ότι

$$Z = \sum_{j=-s}^s e^{-i\omega T j} \quad (6.19)$$

Αυτό υποδεικνύει ότι και σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται ασυνέπεια ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία. Όπως θα πρέπει να έχει γίνει σαφές από τις επισημάνσεις του τρίτου κεφαλαίου, υπεύθυνη γι' αυτή την ασυνέπεια είναι η αφελής αντικατάσταση του συμβόλου H στη δράση με τη μέση τιμή της Hamiltonian στις συνοχικές καταστάσεις -η οποία προκύπτει αν το φετάρισμα γίνει εισάγοντας τις ταυτότητες ανάμεσα στις φέτες. Εξηγήσαμε ήδη ότι αυτή η αφελής αντικατάσταση, όταν διαχειριζόμαστε συνοχικές καταστάσεις, θα επιφέρει προβλήματα.

6.2 Επιδορθώσεις

Μια μέθοδος επιδιόρθωσης, υπό το φως του μετασχηματισμού Holstein-Primakoff θα πρέπει να είναι ήδη προφανής. Ο μετασχηματισμός αυτός μας επιτρέπει να γράψουμε κάθε Hamiltonian που περιέχει spin συναρτήσει μποζονικών τελεστών. Κατόπιν, αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να διαχειριστούμε τα ριζικά στο μετασχηματισμό, μπορούμε να αξιοποιήσουμε τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου και να επιλύσουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα διαδρομών με χρήση μποζονικών συνοχικών καταστάσεων αυτή τη φορά, λαμβάνοντας πάντα υπ' όψιν ότι είμαστε περιορισμένοι σε έναν υπόχωρο του χώρου Hilbert. Επίσης, έχει προταθεί το πέρασμα σε μποζονικούς τελεστές και κατόπιν σε τελεστές θέσης και ορμής, το οποίο όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι, τουλάχιστον σε κάποιες περιπτώσεις, εφικτό[17].

Ωστόσο, και με τις δυο αυτές μεθόδους, είναι σαφές ότι δε γράφουμε το ολοκλήρωμα διαδρομών που αφορά Hamiltonians spin απευθείας στο συνεχές. Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αντίστροφης γεωμετρικής κβάντωσης που προτάθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Σ' αυτή την περίπτωση ο κινητικός όρος είναι

$$is \frac{z^* \dot{z} - \dot{z}^* z}{1 + |z|^2}. \quad (6.20)$$

Οι γενήτορες του spin ικανοποιούν την άλγεβρα $su(2)$. Την ίδια άλγεβρα ικανοποιούν και οι γενήτορες των ισομετριών σε μια 2-σφαίρα. Οπότε ένα σύστημα spin είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα που κινείται πάνω σε μια 2-σφαίρα, η οποία είναι και η κλασική πολλαπλότητα που αντιστοιχεί σε ένα σύστημα spin. Αυτός είναι και ο βαθύτερος λόγος που ο κινητικός όρος έχει τη συγκεκριμένη μορφή, αφού όπως είπαμε η μορφή του συνδέεται με τη δομή της κλασικής πολλαπλότητας. Αυτός ο κινητικός όρος υποδεικνύει το συμπλεκτικό δυναμικό

$$A = is \frac{z^* dz - z dz^*}{1 + |z|^2}. \quad (6.21)$$

Επίσης, ενθυμούμενοι ότι ενδιαφερόμαστε για τις ολομορφικά πολωμένες συνοχικές καταστάσεις, οι καταστάσεις που μας αφορούν στην πραγματικότητα εδώ είναι οι μη κανονικοποιημένες:

$$|z\rangle = \sum_{j=-s}^s \sqrt{\frac{(2s)!}{(s-j)!(s+j)!}} z^{s-j} |s, j\rangle, \quad (6.22)$$

διότι η συνθήκη ολομορφικής πόλωσης δίνει

$$(\partial_{z^*} + iA_{z^*})\psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{1}{(1 + |z|^2)^s} \phi(z). \quad (6.23)$$

Ο παράγοντας κανονικοποίησης μετά απ' αυτή τη θεώρηση εγκολπώνεται στην ταυτότητα, η οποία γίνεται:

$$\frac{2s+1}{\pi} \int \frac{dz \wedge dz^*}{(1 + |z|^2)^2} e^{-2s \ln(1+|z|^2)} |z\rangle \langle z| = \hat{I}. \quad (6.24)$$

Θα εφαρμόσουμε για τους τελεστές που αφορούν το spin τη σχέση (5.13), η οποία είναι γενικότερης ισχύος. Όπως είπαμε, οι συντεταγμένες που εμφανίζονται στον τύπο αναφέρονται μόνο σε εκείνες πάνω στις οποίες έγινε η πόλωση, οπότε οι ποσότητες που μας αφορούν εδώ είναι

$$A_z = \frac{isz^*}{1 + |z|^2}, \quad (6.25)$$

$$\xi^z = \frac{i(1 + |z|^2)^2}{2s} \frac{\partial f}{\partial z^*}. \quad (6.26)$$

Για τους τελεστές spin \hat{S}^x , \hat{S}^y , \hat{S}^z μπορούμε να δούμε ότι η δράση τους πάνω στις μη κανονικοποιημένες συνοχικές καταστάσεις γράφεται

$$\frac{1-z^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} + sz, \quad (6.27)$$

$$i \frac{1+z^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} - isz, \quad (6.28)$$

$$-z \frac{\partial}{\partial z} + s, \quad (6.29)$$

αντίστοιχα. Σημειώνεται και πάλι ότι αυτή η γραφή δεν είναι αναπαράσταση των τελεστών spin υπό την έννοια της θεωρίας ομάδων, αλλά απλώς η δράση τους στις μη κανονικοποιημένες συνοχικές καταστάσεις.

Για τον \hat{S}^x ο τύπος (5.13) δίνει:

$$\frac{1-z^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} + sz = \frac{(1+|z|^2)^2}{2s} \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} - (1+|z|^2)^2 z^* \frac{\partial f}{\partial z^*} + f - \frac{i}{2} \partial_z \xi^z. \quad (6.30)$$

Απαιτώντας αυτή να ισχύει για κάθε z και εξισώνοντας τις συναρτήσεις που συνοδεύουν τη μερική παράγωγο, λαμβάνουμε ότι $f = s \frac{z+z^*}{1+|z|^2} + g(z)$. Αξιοποιώντας αυτό και την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει $g = \frac{z}{2}$. Έτσι:

$$\hat{Q}^{-1}(\hat{S}^x) = s \frac{z+z^*}{1+|z|^2} + \frac{z}{2}. \quad (6.31)$$

Ακριβώς με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε

$$\hat{Q}^{-1}(\hat{S}^y) = is \frac{z^* - z}{1+|z|^2} - \frac{iz}{2}, \quad (6.32)$$

$$\hat{Q}^{-1}(\hat{S}^z) = s \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} + \frac{1}{2}. \quad (6.33)$$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε όμως το εξής: οι τελεστές \hat{S}^x , \hat{S}^y αντιστοιχούν σε πεδία που δε διατηρούν την πόλωση, επομένως το αποτέλεσμά μας είναι αναξιόπιστο, και δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Αντίθετα, το αποτέλεσμα για τον \hat{S}^z είναι συνεπές και άρα μπορεί να αξιοποιηθεί.

Υπό το φως του μετασχηματισμού Holstein-Primakoff το αποτέλεσμα αυτό δε θα πρέπει να προκαλεί έκπληξη: η διόρθωση της μέσης τιμής του \hat{S}^z πάνω στις -spin- συνοχικές καταστάσεις είναι ακριβώς αντίθετη από εκείνη της μέσης τιμής του αριθμητικού τελεστή πάνω στις -μποζονικές- συνοχικές καταστάσεις. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού σύμφωνα με τον προαναφερθέντα μετασχηματισμό το άθροισμα αριθμητικού τελεστή και \hat{S}^z είναι ίσο με μια σταθερά, η οποία προφανώς δε λαμβάνει καμία διόρθωση. Είναι επομένως ικανοποιητικό το ότι το αποτέλεσμα που προέκυψε είναι συμβατό με το μετασχηματισμό.

Τώρα, αν για τον υπολογισμό του πλάτους μετάβασης του spin σε μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιήσουμε την ανταπόκριση που βρήκαμε, είναι ευνόητο ότι η όλη

διαδικασία προχωρά ακριβώς όπως έγινε στην προηγούμενη ενότητα, μόνο που το πλάτος (6.16) περιέχει έναν ακόμη όρο $e^{-i\omega T/2}$. Όπως είπαμε, ο παράγοντας που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα διαδρομών ως προς το πεδίο των διακυμάνσεων ισούται έναν παράγοντα φάσης αντίθετο με αυτόν, επομένως θα προκύψει το σωστό αποτέλεσμα.

Όπως επισημάνθηκε ήδη, η τεχνική της αντίστροφης γεωμετρικής κβάντωσης δουλεύει μόνο για τελεστές που έχουν μόνο μέχρι πρώτης τάξης παραγώγους, δηλαδή μόνο για Hamiltonians που έχουν την προβολή του spin στην πρώτη δύναμη. Ωστόσο, ακριβώς όπως στη μποζονική περίπτωση, με αναλυτικές μεθόδους στο πλαίσιο του ολοκλήρωματος διαδρομών, η τεχνική μπορεί να επεκταθεί αποδίδοντας σωστά αποτελέσματα για οποιαδήποτε δύναμη κάποιας προβολής spin. Ο λόγος που αναφερόμαστε σε τυχούσα προβολή του spin, παρόλο που παραπάνω δείξαμε ότι συμπεριφέρεται καλά μόνο μια συγκεκριμένη, μπορεί να είναι από τώρα προφανής, ωστόσο θα εξηγηθεί και παρακάτω.

Πριν καταστρώσουμε ένα χάρτη που να μας δίνει τα Hamiltonian σύμβολα στη δράση για συστήματα spin, ένα ενδιαφέρον σχόλιο το οποίο δε θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει στα μποζονικά συστήματα: όπως είπαμε, υπάρχουν δύο τρόποι να αποφανθεί κανείς για τη σύνδεση: ο ένας είναι από τη 2-μορφή της πολλαπλότητας -στην ουσία το μέτρο ολοκλήρωσης- και ο άλλος από τον κινητικό όρο στη δράση. Στην περίπτωση των μποζονίων, οι δύο αυτοί τρόποι έδιναν το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. Εδώ όμως δεν είναι έτσι. Ας θυμηθούμε την ανάλυση της ταυτότητας:

$$\frac{2s+1}{\pi} \int \frac{d^2z}{(1+|z|^2)^2} e^{-2s \ln(1+|z|^2)} |z\rangle \langle z| = \hat{I}. \quad (6.34)$$

Όμως, στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε πώς να βρίσκουμε την ανάλυση της ταυτότητας για μια πολλαπλότητα με γνωστό μέτρο ολοκλήρωσης. Εδώ είμαστε στη 2-σφαίρα, οπότε σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να βρούμε ως ανάλυση της ταυτότητας:

$$k' \int \frac{dz \wedge dz^*}{(1+|z|^2)} e^{-Y(z,z^*)} |z\rangle \langle z| = \hat{I}. \quad (6.35)$$

Απαιτώντας αυτές οι δύο να ταυτίζονται, προφανώς

$$Y = (2s+1) \ln(1+|z|^2). \quad (6.36)$$

Όμως, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η Y ορίστηκε μέσω της συνθήκης ολομορφικής πόλωσης, δηλαδή από την απαίτηση η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς την αντιολομορφική συντεταγμένη να είναι 0. Άρα, με γνώση της μπορούμε να λάβουμε τη σύνδεση. Εδώ, αν αποφασίσουμε να βρούμε τη σύνδεση κατά την κατασκευή του συναρτησιακού μέτρου ολοκλήρωσης, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$A' = \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{i}{1+|z|^2} (z^* dz - z dz^*), \quad (6.37)$$

η οποία διαφέρει από τη σύνδεση που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω (η γνώση της Y μας έδωσε την A_z^* , και για την A_z χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρία της 2-μορφής). Αυτή είναι ευνόητο ότι θα έδινε διαφορετικό Hamiltonian σύμβολο -στη θέση του s θα είχαμε $s + \frac{1}{2}$ αφού αυτή είναι η αλλαγή στη νέα σύνδεση σε σχέση με την προηγούμενη. Προφανέστατα αυτό το σύμβολο δεν αναπαράγει τη σωστή συνάρτηση επιμερισμού για το σύστημα που μελετήσαμε. Συγκεκριμένα αποδίδει τη συνάρτηση επιμερισμού ενός σωματιδίου που έχει spin $\frac{1}{2}$ μεγαλύτερο από το πραγματικό.

Αυτό καθορίζει υπεράνω πάσης αμφιβολίας ότι η ανάγνωση της σύνδεσης πρέπει να γίνει από τον κινητικό όρο και όχι από το μέτρο ολοκλήρωσης. Αυτό δεν προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη: ο κινητικός όρος είναι που συνδέεται απευθείας με την κλασική μηχανική -η οποία εγκοιλιώνεται στη δράση- και άρα είναι πολύ πιο εύλογο αυτός να μας δείξει τη δομή της πολλαπλότητας όπως περιγράφεται από τη σύνδεση. Αυτό επίσης υποδεικνύει ότι, όσον αφορά το μέτρο ολοκλήρωσης, η σύνδεση κάποιου τελεστή με κάποια κλασική συνάρτηση δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Μονοσήμαντα ορισμένη είναι η σύνδεση τελεστή και κλασικής συνάρτησης μόνο αν επιλεγεί μέσω της συμπλεκτικής δομής κάποια συγκεκριμένη πολλαπλότητα. Με το να διαβάζουμε τη σύνδεση από τον κινητικό όρο κάνουμε ακριβώς αυτό: επιλέγουμε μια συγκεκριμένη πολλαπλότητα, και μάλιστα την πλέον εύλογη μιας και η επιλογή γίνεται κατευθείαν από τη μορφή του κινητικού όρου, ο οποίος βρίσκεται στη δράση.

Επισημαίνουμε εκ νέου ότι καταφέραμε να πάρουμε αποτέλεσμα που διατηρεί την πόλωση -και άρα είναι αξιόπιστο για χρήση- μόνο για τον έναν από τους τρεις γενήτορες της άλγεβρας στροφορών. Αυτό δε θα έπρεπε να προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη: αφενός υπάρχει ο μετασχηματισμός Holstein-Primakoff ο οποίος συνδέει τους S^x , S^y με ρίζες τελεστών, το οποίο προδιαθέτει πως κάπου θα εμφανιστεί κάποιο πρόβλημα. Αφετέρου, αν παρατηρήσει κανείς πιο προσεκτικά τα όσα έγιναν παραπάνω, στην πραγματικότητα δε διαχειριστήκαμε τους τρεις γενήτορες ισοδύναμα. Αχραιφνής εκδήλωση αυτού είναι το ότι γράψαμε τις συνοχικές καταστάσεις πάνω στη βάση των ιδιοκαταστάσεων του \hat{S}^z . Όμως, είναι ευνόητο ότι έχουμε το δικαίωμα να τις γράψουμε, εναλλακτικά, πάνω στη βάση των ιδιοκαταστάσεων οποιουδήποτε στοιχείου \hat{S}^z της άλγεβρας $su(2)$. Αυτό είναι πολύ πιο εύληπτο αν το δούμε υπό όρους στροφών. Όντως, ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο της άλγεβρας $su(2)$, δηλαδή κάποιο σταθερό γραμμικό συνδυασμό των τριών γενητόρων:

$$\hat{H} = a\hat{S}^x + b\hat{S}^y + c\hat{S}^z. \quad (6.38)$$

Με μια κατάλληλη στροφή μπορούμε να δούμε ότι αυτό μπορεί να γραφεί ως $\hat{H} = \omega\hat{S}^z$, $\omega = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}$. Απο 'κει και πέρα μπορούμε να επαναλάβουμε την όλη διαδικασία, απλά αυτή τη φορά γράφοντας τις συνοχικές καταστάσεις ως γραμμικούς συνδυασμούς των ιδιοκαταστάσεων του νέου \hat{S}^z .

Τέλος, σημειώνουμε ότι υπάρχει και για τα συστήματα spin Θεώρημα Groenewold. Η απόδειξή του είναι πιο περίπλοκη οπότε δε θα την καταγράψουμε. Αναφέρουμε απλώς ότι στην πολλαπλότητα της 2-σφαίρας το μέγιστο υποσύνολο που μπορεί να αποχβαντωθεί με συνέπεια είναι απλώς εκείνο που περιέχει τις προβολές του spin στις τρεις διευθύνσεις και την ταυτότητα. Δηλαδή σε αυτή την

πολλαπλότητα οι ασυνέπειες εμφανίζονται ήδη μόλις φτάσουμε σε τελεστές που είναι πολυώνυμα δεύτερης τάξης ως προς τους τελεστές spin.

6.3 Ένας χάρτης για συστήματα spin

Όπως είδαμε στο Τέταρτο κεφάλαιο, στα πλαίσια του ολοκληρώματος διαδρομών είναι εφικτό να βρούμε τα κλασικά σύμβολα που πρέπει να εισαχθούν στη δράση για μια ευρεία γκάμα μποζονικών τελεστών. Επειδή οι τελεστές spin είναι Ερμητιανοί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (5.79) και να αποχβαντώσουμε επιτυχώς ανώτερες δυνάμεις του τελεστή spin σε κάποια διεύθυνση. Έτσι, μπορούμε να βρούμε κι εδώ ένα χάρτη, πολύ ευρύτερο από τους μέχρι τώρα γνωστούς, συγκεκριμένα την ανταπόκριση:

$$(\hat{S}^z)^n \leftrightarrow \left(s \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad (6.39)$$

όπου n μη αρνητικός ακέραιος. Τονίζουμε για μια ακόμη φορά ότι αυτή η ανταπόκριση προέκυψε με αλγεβρικές τεχνικές στο ολοκλήρωμα διαδρομών και δεν είναι, απαραίτητα, γενικότερης ισχύος. Ωστόσο, σέβεται όλες τις συνθήκες του Dirac διότι ξεκάθαρα οποιοδήποτε τελεστές στη μορφή του πρώτου της μέλους μετατίθενται και οποιοσδήποτε συναρτήσεις στη μορφή του δεύτερου έχουν μηδενική αγκύλη Poisson, οπότε η συνθήκη της άλγεβρας ομοιομορφισμών ισχύει για αυτά τα σετ.

Όπως και στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ μποζονικών πεδίων, μπορούμε να διαχειριστούμε και όρους αλληλεπίδρασης spin διαφορετικών υποσυστημάτων, μόνο που εδώ οι δυνατότητές μας είναι πιο περιορισμένες λόγω της ανάγκης της επιλογής συγκεκριμένης διεύθυνσης spin που θα αποχβαντωθεί για κάθε υποσύστημα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ταυυστικό γινόμενο γεννητόρων της $su(2)$ διαφορετικών υποσυστημάτων. Τότε, ακριβώς με τη λογική που ακολουθήσαμε στις μποζονικές αλληλεπιδράσεις, επειδή κάθε γεννήτορας δρα σε διαφορετικό χώρο Hilbert:

$$\mathcal{Q}^{-1}(\omega_{12\dots k}(\hat{S}^{z1})^{a_1} \otimes (\hat{S}^{z2})^{a_2} \dots \otimes (\hat{S}^z)^{a_k}) = \omega_{12\dots k} [\hat{Q}^{-1}(\hat{S}^{z1})]^{a_1} [\hat{Q}^{-1}(\hat{S}^{z2})]^{a_2} \dots [\hat{Q}^{-1}(\hat{S}^{zk})]^{a_k}, \quad (6.40)$$

$(\hat{S}^{zl})^{a_l}$ είναι ο τελεστής του l -οστού συστήματος, ο οποίος συμμετέχει στην αλληλεπίδραση, υψωμένος στη δύναμη a_l .

Ιδιαίτερη μνεία χρειάζονται οι περιπτώσεις γραμμικών συνδυασμών τέτοιων όρων. Αυτοί δε μπορούν να αποχβαντωθούν με συνέπεια, παρά μόνο αν σε όλους του όρους του γραμμικού συνδυασμού συμμετέχει, για κάθε υποσύστημα, η προβολή του spin το πολύ σε μία διεύθυνση. Ωστόσο, στην περίπτωση που αυτό είναι αληθές, η χβαντική Hamiltonian μπορεί να αποχβαντωθεί επιτυχώς ανεξαρτήτως του σε ποια δύναμη και του σε πόσους και σε ποιους όρους εμφανίζεται ο κάθε γεννήτορας.

Έτσι, η γενικότερη μορφή αλληλεπίδρασης που μπορούμε να αποχβαντώσουμε επιτυχώς είναι

$$\hat{O} = \sum_{l=1}^N \omega_l (\hat{S}^{z1})^{n_{l1}} \otimes (\hat{S}^{z2})^{n_{l2}} \dots \otimes (\hat{S}^{zk})^{n_{lk}}, \quad (6.41)$$

όπου ο $(\hat{S}^{zj})^m$ συμβολίζει την m -οστή δύναμη της -μοναδικής- προβολής spin του j -οστού συστήματος που συμμετέχει στη Hamiltonian, και φυσικά το άθροισμα είναι πάνω σε όλους τους όρους αλληλεπιδράσεων. Σημειώστε ότι εμφανίζεται σε όλους τους όρους το πολύ ένας γενήτορας -δηλαδή προβολή spin το πολύ σε μία διεύθυνση, την οποία ως συνήθως ταυτοποιούμε με τον άξονα των z - ακριβώς όπως πρέπει για συνεπή αποχβάντωση. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις μπορούν να αποχβαντωθούν διότι οι τελεστές spin που αφορούν διαφορετικά υποσυστήματα εξ ορισμού μετατίθενται μεταξύ τους -οι χώροι Hilbert τους είναι διαφορετικοί.

Η χρησιμότητα της μελέτης συστημάτων spin που αλληλεπιδρούν είναι συγκλονιστική για τη φυσική της χβαντικής πληροφορικής, όπου γίνονται προσπάθειες για κωδικοποίηση της πληροφορίας σε βαθμούς ελευθερίας spin. Πλέον, φαινόμενα όπως ο θόρυβος και η αποσυνοχή που προκαλεί το περιβάλλον μπορούν να μελετηθούν με ολοκληρώματα διαδρομών όταν οι αναλυτικές τεχνικές είναι ασαφείς ή δε μπορούν να αποδώσουν αποτελέσματα, εφόσον βέβαια οι όροι αλληλεπίδρασης πληρούν τις προϋποθέσεις που αναφέραμε παραπάνω.

Κεφάλαιο 7

ΦΕΡΜΙΟΝΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ ΚΑΙ ΦΕΡΜΙΟΝΙΑ MAJORANA

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πώς να διαχειριστούμε το ολοκλήρωμα διαδρομών που αντιστοιχεί σε Hamiltonians γραμμένες συναρτήσε μοζονικών τελεστών δημιουργίας και καταστροφής και τελεστών spin -ακριβέστερα είδαμε μέσω του χάρτη που προτάθηκε παραπάνω σε ποιες περιπτώσεις είναι κάτι τέτοιο εφικτό. Όπως είδαμε, όλα τα προβλήματα και οι ασυνέπειες που εντοπίστηκαν παραπάνω πηγάζουν από το ότι οι πιθανές διατάξεις ίδιων τελεστών δεν είναι ισοδύναμες.

Σε αυτό το σημείο θα περάσουμε σε συστήματα η Hamiltonian των οποίων είναι γραμμένη συναρτήσε φερμιονικών τελεστών. Όπως θα δούμε αμέσως τα συστήματα αυτά έχουν ιδιότητες οι οποίες απλοποιούν δραστικά τους υπολογισμούς και έτσι είναι μια πρώτης τάξεως ευκαιρία να τα δούμε αναλυτικά και να ελέγξουμε αν οι ασυνέπειες που έχουν ήδη εντοπιστεί στις άλλες κατηγορίες συστημάτων εμμένουν και εδώ.

7.1 Φερμιονικά πεδία και μεταβλητές Grassmann

Φερμιόνια ονομάζονται τα σωματίδια που έχουν spin ημισακέραιο πολλαπλάσιο του \hbar (εν αντιθέσει με τα μποζόνια που το spin τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του \hbar) ή από τη σκοπιά της στατιστικής φυσικής τα σωματίδια δύο ή περισσότερα εκ των οποίων δε μπορούν να καταλαμβάνουν ποτέ την ίδια κατάσταση (Απαγορευτική Αρχή του Pauli). Σωματίδια μποζονικής φύσεως, αντιθέτως, δεν έχουν κανέναν τέτοιο περιορισμό και οποιοσδήποτε αριθμός τους μπορεί να καταλαμβάνει την ίδια

κατάσταση. Αυτό γραμμένο υπό όρους αριθμητικού τελεστή είναι προφανές τι σημαίνει: στα μποζονικά συστήματα η ετικέτα μιας ιδιοκατάστασης του αριθμητικού τελεστή ήταν ένας ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος με το 0 κωδικοποιώντας ότι οποιοσδήποτε αριθμός μποζονικών βαθμών ελευθερίας μπορεί να καταλαμβάνει την ίδια κατάσταση. Προφανώς στα φερμιονικά συστήματα αυτό αλλάζει. Πλέον μια κατάσταση μπορεί να καταληφθεί το πολύ από ένα φερμιόνιο, επομένως ο αριθμητικός τελεστής -σημειώνουμε ότι έχει και εδώ την ίδια μορφή $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ με τα μποζονικά συστήματα- μπορεί να πάρει δύο ετικέτες: $n = 0$, $n = 1$. Για να συμβεί αυτό απαιτείται να αλλάξει η άλγεβρα των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Η φερμιονική άλγεβρα είναι:

$$\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = \{\hat{a}, \hat{a}\} = 0, \quad (7.1)$$

$$\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\} = 1, \quad (7.2)$$

όπου οι αγκύλες κωδικοποιούν τον αντιμεταθετή $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

Παρατηρήστε ότι η πρώτη εξ αυτών υπονοεί ότι το τετράγωνο -και κατ' επέκταση κάθε υψηλότερη δύναμη- ενός φερμιονικού τελεστή είναι ίσο με μηδέν. Αυτό είναι μια κομψή κωδικοποίηση του ότι δεν υπάρχουν πάνω από δύο διαθέσιμες ιδιοκαταστάσεις του αριθμητικού τελεστή φερμιονικών συστημάτων: αφού οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής δημιουργούν και καταστρέφουν αντίστοιχα ένα σωματίδιο, διπλή εφαρμογή κάποιου εξ αυτών σημαίνει διαδοχική δημιουργία ή καταστροφή δύο σωματιδίων, που όπως είπαμε απαγορεύεται αφού δυο φερμιόνια δε μπορούν να καταλάβουν την ίδια κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος Hilbert των φερμιονίων στήνεται μόνο από δύο καταστάσεις, τις $|0\rangle$, $|1\rangle$. Με χρήση της φερμιονικής άλγεβρας είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι:

$$\hat{a} |0\rangle = 0, \quad (7.3)$$

$$\hat{a}^\dagger |0\rangle = |1\rangle, \quad (7.4)$$

$$\hat{a} |1\rangle = |0\rangle, \quad (7.5)$$

$$\hat{a}^\dagger |1\rangle = 0. \quad (7.6)$$

Όταν θα συζητήσουμε για το ολοκλήρωμα διαδρομών φερμιονικών συστημάτων, θα χρειαστεί να εγκολώσουμε την αντιμεταθετική δομή των φερμιονικών τελεστών σε μεταβλητές ολοκλήρωσης. Αυτό μπορεί να γίνει με τις λεγόμενες μεταβλητές Grassmann οι οποίες ορίζονται από την απαίτηση να αντιμετατίθενται, δηλαδή για δύο τέτοιες να ισχύει $u_1 u_2 = -u_2 u_1$. Αυτή τις καθιστά φυσικά μηδενοδύναμες $u^2 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι και κάθε ανώτερη δύναμή τους είναι επίσης μηδενική, το οποίο παρέχει μια σειρά από χρήσιμες ιδιότητες.

Μια απ' αυτές είναι ότι μια συνάρτηση κάποιας μεταβλητής Grassmann έχει ανάπτυγμα Taylor που φτάνει το πολύ μέχρι πρώτη δύναμη -αφού η μεταβλητή

ως προς την οποία αναπτύσσουμε είναι μηδενοδύναμη μπορούν να υπάρχουν μόνο πολυώνυμα μέχρι πρώτης τάξης ως προς αυτήν. Έτσι, τα αναπτύγματα Taylor εδώ λαμβάνουν την εξαιρετικά βολική μορφή

$$F(u) = F_0 + F_1 u. \quad (7.7)$$

Προφανώς $F_0 = F(0)$, $F_1 = \frac{\partial F}{\partial u}$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε ολοκλήρωση ως προς τέτοιες μεταβλητές -να σημειωθεί εδώ ότι λόγω της αντιμεταθετικότητας έχει πολύ μεγάλη σημασία το σε ποια θέση βρίσκεται το μέτρο ολοκλήρωσης και η προς ολοκλήρωση συνάρτηση. Ορίζουμε για μεταβλητές Grassmann τους εξής κανόνες ολοκλήρωσης:

$$\int \frac{du}{\sqrt{2\pi}} = 0, \quad (7.8)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2\pi}} u = 1. \quad (7.9)$$

Αυτές αναπαράγουν τη σωστή φυσική όταν εφαρμοστούν στο πλαίσιο του ολοκληρώματος διαδρομών. Η ολοκλήρωση θεωρείται και πάλι ότι έχει την ιδιότητα της γραμμικότητας.

Η παραπάνω υπονοεί κάτι πολύ ενδιαφέρον: αν ολοκληρώσουμε μια τυχούσα συνάρτηση θα δούμε ότι η ολοκλήρωση ισοδυναμεί με παραγωγήιση! Αυτό σημαίνει πως η αλλαγή Grassmann μεταβλητών ολοκλήρωσης δε συνοδεύεται πλέον από τη Jacobian αλλά από την αντίστροφή της

$$\int \frac{du}{\sqrt{2\pi}} F(u'(u)) = \int \frac{du'}{\sqrt{2\pi}} \frac{du'}{du} F(u'). \quad (7.10)$$

Η δε ολοκλήρωση κατά παράγοντες δε συνοδεύεται από σχετικό πρόσημο μείον αλλά από συν:

$$\int \frac{du}{\sqrt{2\pi}} G(u) \frac{dF(u)}{du} = \int \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{dG(u)}{du} F(u). \quad (7.11)$$

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε και τη συνάρτηση του Dirac:

$$\int \frac{du'}{\sqrt{2\pi}} \delta(u - u') F(u') = F(u), \quad (7.12)$$

το οποίο υπονοεί ότι μπορεί να γραφεί $\delta(u - u') = u' - u$.

Με χρήση δύο πραγματικών μεταβλητών Grassmann μπορούμε να ορίσουμε τις μιγαδικές μεταβλητές:

$$a^* = \frac{u_1 - iu_2}{\sqrt{2}}, \quad (7.13)$$

$$a = \frac{u_1 + iu_2}{\sqrt{2}}. \quad (7.14)$$

Για το μέτρο ολοκλήρωσης:

$$\int \frac{da^* da}{\pi} = - \int \frac{dada^*}{\pi} = \int \frac{du_2 du_1}{2\pi i}. \quad (7.15)$$

Άρα

$$\int \frac{da^* da}{\pi} = \int \frac{da^* da}{\pi} a = \int \frac{da^* da}{\pi} a^* = 0, \quad (7.16)$$

$$\int \frac{da^* da}{\pi} a^* a = \int \frac{du_2 du_1}{2\pi i} i u_1 u_2 = 1. \quad (7.17)$$

Με όσα είπαμε παραπάνω, είναι εμφανές ότι

$$e^{-a^* A a} = 1 - a^* A a, \quad (7.18)$$

$$\int \frac{da^* da}{\pi} e^{-a^* A a} = A, \quad (7.19)$$

και κατ' επέκταση

$$\int \frac{da^* da}{\pi} e^{-\sum_{n,m} a_n^* A_{nm} a_m} = \text{Det} A. \quad (7.20)$$

Άρα το Gaussian ολοκλήρωμα ως προς μιγαδικές μεταβλητές Grassmann δίνει ακριβώς το αντίστροφο αποτέλεσμα από το Gaussian ολοκλήρωμα συμβατικών μιγαδικών μεταβλητών.

Έχοντας ανά χείρας τις απαραίτητες ιδιότητες σε ότι αφορά πράξεις με Grassmann μεταβλητές, είμαστε πια σε θέση να μελετήσουμε τις συνοχικές καταστάσεις φερμιονικών συστημάτων. Ξεκινάμε από τον ορισμό των συνοχικών καταστάσεων, σε πλήρη αναλογία με τις μποζονικές:

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{\hat{a}^\dagger z} |0\rangle = e^{-|z|^2/2} (|0\rangle - z|1\rangle), \quad (7.21)$$

$$\langle z| = e^{-|z|^2/2} (\langle 0| + z^* \langle 1|). \quad (7.22)$$

Σημειώνουμε τη συντόμευση $|z|^2 = z^* z$ (δεν είναι το ίδιο με το $z z^*$ λόγω του ότι εδώ οι μεταβλητές αντιμετατίθενται) καθώς και ότι για λόγους συνέπειας του φορμαλισμού οι μεταβλητές αντιμετατίθενται με τους φερμιονικούς τελεστές. Παρατηρήστε πως η ανάπτυξη της συνοχικής καταστάσης σταματάει στην ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί σε ένα σωματίο, όπως υπαγορεύεται από την Απαγορευτική Αρχή του Pauli, κάτι που εγκολπώνεται θαυμάσια στο ότι η συνοχική μεταβλητή είναι Grassmann φύσεως, οπότε η ανάπτυξη ως προς αυτή μέχρι πρώτη τάξη μπορεί να φτάσει.

Εφόσον μιλάμε για φερμιονικές μεταβλητές, το ίχνος υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα πάνω στα αντιπεριοδικά στοιχεία αυτή τη φορά,

$$\text{tr} \hat{O} = \int \frac{dz^* dz}{\pi} \langle -z | \hat{O} | z \rangle. \quad (7.23)$$

7.2. Η ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΦΕΡΜΙΟΝΙΚΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΦΕΤΑΡΙΣΜΑ 75

Πράγματι, με χρήση των κανόνων ολοκλήρωσης και αυτού του ορισμού είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι όντως $\text{tr}\hat{O} = \langle 0|\hat{O}|0\rangle + \langle 1|\hat{O}|1\rangle$. Οι συνοχικές καταστάσεις στήνουν και εδώ υπερπλήρη βάση

$$\langle z_1|z_2\rangle = e^{-z_1^*(z_1-z_2)/2+(z_1^*-z_2^*)z_2/2} \quad (7.24)$$

και αναλύουν την ταυτότητα

$$\hat{I} = \int \frac{dz^* dz}{\pi} |z\rangle \langle z|, \quad (7.25)$$

όπως μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε.

Τώρα, έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να προχωρήσουμε σε υπολογισμούς. Ευθύς αμέσως θα παραθέσουμε μία απόδειξη ενός γεγονότος που ήδη έχουμε αναφέρει πολλές φορές: το κλασικό σύμβολο της Hamiltonian στη δράση εξαρτάται εν γένει από τη διαδικασία διακριτοποίησης. Λόγω της πολυπλοκότητας των υπολογισμών, αποφασίσαμε να μην παρουσιάσουμε τις αντίστοιχες αποδείξεις στις περιπτώσεις των μποζονικών συστημάτων και των συστημάτων spin. Από την άλλη εδώ, χρησιμοποιώντας το ότι οι μεγαλύτερες της πρώτης δυνάμεις μεταβλητών Grassmann και φερμιονικών τελεστών είναι μηδέν, μπορούμε να απλοποιήσουμε πάρα πολύ τους υπολογισμούς. Αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε ακριβώς την ίδια λογική που θα ακολουθήσουμε στην επόμενη ενότητα και στα προαναφερθέντα συστήματα, αφού κάνουμε τους πολύ πιο στριφνούς εκεί υπολογισμούς, θα καταλήξουμε στα αποτελέσματα που ήδη παραθέσαμε στις αντίστοιχες ενότητες.

7.2 Η εξάρτηση του φερμιονικού ολοκληρώματος από το φετάρισμα

Θα ασχοληθούμε με το εμβληματικό μας παράδειγμα, τον αρμονικό ταλαντωτή. Όταν αναφερόμαστε σε φερμιονικό αρμονικό ταλαντωτή, το μόνο που εννοούμε είναι ότι η Hamiltonian εξαρτάται από τον αριθμητικό τελεστή, ακριβώς όπως στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, απλώς οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής ικανοποιούν τη φερμιονική άλγεβρα. Έτσι μελετάμε τη Hamiltonian

$$\hat{H} = \omega(2\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1). \quad (7.26)$$

Για να αποσυμφωρήσουμε το συμβολισμό χρησιμοποιούμε σύστημα μονάδων όπου $\hbar = 1$, θα αγνοήσουμε και τους παράγοντες π στον παρονομαστή των μέτρων ολοκλήρωσης ως προς τους μιγαδικούς, ενώ χωρίς καμία βλάβη σε σχέση με τα προηγούμενα πολλαπλασιάσαμε τη Hamiltonian με έναν παράγοντα 2. Ζητάμε το πλάτος μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη:

$$\langle z_a|e^{-iT\hat{H}}|z_b\rangle. \quad (7.27)$$

Πρώτα θα φετάρουμε το εκθετικό αξιοποιώντας τον τύπο του Trotter. Όπως εξηγήσαμε στο Δεύτερο κεφάλαιο, κατόπιν θα εισάγουμε ταυτότητες ανάμεσα στα εκθετικά, κι έτσι θα προκύψει ένα γινόμενο όρων $\langle z_{n-1}|e^{-i\epsilon\hat{H}}|z_n\rangle$ όπου ϵ είναι το

πάχος κάθε φέτας $T = N\epsilon$. Επίσης εδώ απλώς αριθμήσαμε τις φέτες αντίστροφα απ' ό τι αριθμούσαμε ως τώρα. Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$e^{-i\epsilon\hat{H}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\epsilon)^k}{k!} \hat{H}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\epsilon\omega)^k}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} 2^l (-1)^{k-l} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^l. \quad (7.28)$$

Προσέξτε ότι

$$(\hat{a}^\dagger \hat{a})^n = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (7.29)$$

για κάθε $n \geq 1$. Έτσι μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} 2^l (-1)^{k-l} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^l = (-1)^k + [1 - (-1)^k] \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (7.30)$$

Άρα

$$e^{-i\epsilon\hat{H}} = e^{i\omega\epsilon}(1 - \hat{a}^\dagger \hat{a}) + e^{-i\omega\epsilon} \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (7.31)$$

Τώρα, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$e^{-i\epsilon\hat{H}} |z_n\rangle = e^{i\omega\epsilon} \left(1 - \frac{|z_n|^2}{2}\right) |0\rangle - e^{-i\omega\epsilon} z_n |1\rangle. \quad (7.32)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\langle 1| z_n = \langle 0| \hat{a} z_n = -z_n \langle 0| \hat{a} = -z_n \langle 1|, \quad (7.33)$$

λαμβάνουμε

$$\langle z_{n-1}| e^{-i\epsilon\hat{H}} |z_n\rangle = e^{i\omega\epsilon} \left(1 - \frac{|z_n|^2}{2}\right) \left(1 - \frac{|z_{n-1}|^2}{2}\right) + e^{-i\omega\epsilon} z_{n-1}^* z_n. \quad (7.34)$$

Τώρα αναπτύσσουμε τα εκθετικά και αγνοούμε όρους ανάλογους του ϵ^2 διότι το γινόμενο N τέτοιων ποσοτήτων, τους εξουδετερώνει στο όριο $N \rightarrow \infty$. Εκμεταλλευόμενοι το ότι οι μεταβλητές μας είναι Grassmann μπορούμε να βρούμε τον όρο μηδενικής τάξης ως προς ϵ ,

$$\exp\left(\frac{z_{n-1}^* (z_n - z_{n-1})}{2} - \frac{(z_n^* - z_{n-1}^*) z_n}{2} + \frac{|z_n|^2 |z_{n-1}|^2}{4}\right). \quad (7.35)$$

Είναι προφανές ότι παίρνοντας το όριο $\epsilon \rightarrow 0$ όλων των όρων μηδενικής τάξης στο γινόμενο λαμβάνουμε το γνωστό κινητικό όρο

$$e^{i \int_0^T dt' \frac{i}{2} (z^* \dot{z} - \dot{z}^* z)} \quad (7.36)$$

(οι φέτες αριθμούνται με τρόπο ώστε να φθίνει το n καθώς προχωράμε στο χρόνο). Παρομοίως, ο όρος πρώτης τάξης σε μια φέτα είναι ίσος με $i\omega\epsilon(1 - 2|z_n|^2)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις φέτες, και ψάχνοντας το ίχνος -δηλαδή τη συνάρτηση επιμερισμού- αυτή τη φορά, βρίσκουμε:

7.2. Η ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΦΕΡΜΙΟΝΙΚΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΦΕΤΑΡΙΣΜΑ 77

$$Z' = \int_{AP} Dz^* Dz e^{i \int_0^T dt' [\frac{i}{2}(z^* \dot{z} - \dot{z}^* z) - \omega(2|z|^2 - 1)]}. \quad (7.37)$$

Άρα, σύμφωνα με αυτή τη συλλογιστική, το κλασικό σύμβολο που πρέπει να βάλουμε στη δράση για αυτό το κβαντικό σύστημα είναι $H = \omega(2|z|^2 - 1)$. Αυτό δίνει λάθος τη συνάρτηση επιμερισμού, όπως θα δείξουμε αργότερα. Πριν απ' αυτό, ας εξετάσουμε μια άλλη διαδικασία φεταρίσματος. Η λογική της είναι να μην εισάγουμε ταυτότητες μεταξύ των φετών, αλλά αντ' αυτού να εισάγουμε "κάτι σαν ταυτότητα" σε κάθε ξεχωριστή φέτα. Ορίζουμε λοιπόν το κλασικό σύμβολο $H_c(z^*, z)$ μέσω της

$$e^{-i\epsilon\hat{H}} = \int |z_n\rangle e^{-i\epsilon H_c(z_n^*, z_n)} dz_n^* dz_n \langle z_n|. \quad (7.38)$$

Τότε η συνάρτηση επιμερισμού στο διακριτό μπορεί να γραφεί

$$Z'' = \int \prod_{n=1}^{N-1} dz_n^* dz_n e^{K - i\epsilon H_c}, \quad (7.39)$$

$$K = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{z_{n+1}^* - z_n^*}{2} z_n - z_{n+1}^* \frac{z_{n+1} - z_n}{2} \right). \quad (7.40)$$

Προφανώς, το όριο του K στο συνεχές δίνει και πάλι τον κινητικό όρο. Μένει να βρούμε το κλασικό σύμβολο. Επισημαίνουμε δύο διαφορές ανάμεσα σ' αυτή τη διαδικασία φεταρίσματος και στην προηγούμενη: πρώτον, λόγω του ότι οι ταυτότητες εισάγονται σε κάθε φέτα και όχι ανάμεσά τους, εδώ εισήχθη μια παραπάνω ταυτότητα. Δεύτερον και σημαντικότερο, το σύμβολο που εισάγεται στη δράση, στη διακριτή του μορφή, εκφράζεται συναρτήσει μεταβλητών που ανήκουν στην ίδια φέτα, ενώ με το προηγούμενο φετάρισμα εκφράζεται συναρτήσει μεταβλητών γειτονικών φετών.

Προχωρούμε υπολογίζοντας:

$$\langle z_k | e^{-i\epsilon\hat{H}} | z_k \rangle = \int \langle z_k | z_n \rangle e^{-i\epsilon H_c} dz_n^* dz_n \langle z_n | z_k \rangle. \quad (7.41)$$

Όμως $\langle z_k | z_n \rangle = e^{-|z_k|^2/2 - |z_n|^2/2 + z_k^* z_n}$, ενώ έχουμε βρει και τον τελεστή $e^{-i\epsilon\hat{H}}$, οπότε

$$\langle z_k | e^{-i\epsilon\hat{H}} | z_k \rangle = e^{i\epsilon\omega} (1 - |z_k|^2) + e^{-i\epsilon\omega} |z_k|^2. \quad (7.42)$$

Αναπτύσσουμε πάλι μέχρι την πρώτη τάξη και συγκρίνουμε τους συντελεστές μηδενικής και πρώτης τάξης. Για εκείνους μηδενικής τάξης βρίσκουμε

$$e^{-|z_k|^2/2} (1 - z_k z_k^*) e^{-|z_k|^2/2} = 1, \quad (7.43)$$

που ισχύει τετριμμένα, ενώ για εκείνους πρώτης τάξης θέτοντας $H_c = a + bz_n + cz_n^* + dz_n^* z_n$ μετά τους υπολογισμούς καταλήγουμε στην

$$i\omega\epsilon(1 - 2|z_k|^2) = -i\epsilon(a - d - bz_k - cz_k^* + d|z_k|^2), \quad (7.44)$$

η οποία φυσικά ισχύει για κάθε z_k . Άρα, $\omega = d - a$, $b = c = 0$, $2\omega = d$. Έτσι,

$$H_c = \omega(2|z|^2 + 1). \quad (7.45)$$

Με τις δύο διαφορετικές διαδικασίες φεταρίσματος, προέκυψαν δύο διαφορετικά αποτελέσματα για το κλασικό σύμβολο που πρέπει να εισαχθεί στη δράση. Ακόμα χειρότερα, δε, δίνουν και τα δύο λάθος αποτέλεσμα για τη συνάρτηση επιμερισμού! Αυτή η ασυνέπεια που προέκυψε υποδεικνύει ξεκάθαρα ότι αν βασιστούμε σε κάποια συγκεκριμένη συνταγή για να διορθώσουμε τυχόν λάθη που εμφανίζονται παίρνοντας το συνεχές όριο του ολοκληρώματος διαδρομών, στην πραγματικότητα αυτή η συνταγή θα είναι συνδεδεμένη με το ποια διαδικασία φεταρίσματος ακολουθηθήθηκε. Αυτό φυσικά δεν είναι αποδεκτό για ένα συνεπή ορισμό της συνεχούς έκδοσης του ολοκληρώματος διαδρομών. Προφανώς η -μονοσήμαντα ορισμένη- συνεχής και η διακριτή έκδοση είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους, μόνο που η ακριβής τους σύνδεση εξαρτάται από το πώς έγινε το φετάρισμα, το οποίο όμως είναι άορατο στο συνεχές. Έτσι, ανακύπτει εύλογα το ερώτημα: τότε το συνεχές όριο δεν εξαρτάται από το φετάρισμα;

Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να μας υποδείξει την απάντηση. Θεωρούμε πάλι τον τύπο (7.41). Τι θα συνέβαινε εδώ αν τα $|z_k\rangle$ έστηναν ορθοκανονική βάση; Τότε είναι προφανές ότι τα παραπάνω εσωτερικά γινόμενα είναι ίσα με $\delta(n - k)$ και άρα οι δύο ολοκληρώσεις δίνουν $n = k$ άρα

$$\langle z_k | e^{-i\epsilon\hat{H}} | z_k \rangle = e^{-i\epsilon H_c}. \quad (7.46)$$

Αναπτύσσοντας ξανά ως προς ϵ προκύπτει

$$H_c = \langle z | \hat{H} | z \rangle. \quad (7.47)$$

Αυτό υποδεικνύει ότι για Hamiltonians γραμμένες συναρτήσεις Ερμητιανών τελεστών είμαστε σε θέση να διαχειριστούμε με συνέπεια το ολοκλήρωμα διαδρομών λόγω της ιδιότητάς αυτών των τελεστών να έχουν ορθογώνιες ιδιοκαταστάσεις. Αν οι καταστάσεις που εισάγονται για την ανάλυση της ταυτότητας είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, προφανώς οι συναρτήσεις Dirac που θα προκύπτουν απ' αυτή την ορθογωνιότητα θα οδηγήσουν στο ίδιο κλασικό σύμβολο, ανεξαρτήτως του ποια διαδικασία φεταρίσματος ακολουθήσαμε.

Πριν προχωρήσουμε στην αναζήτηση Ερμητιανών τελεστών στην περίπτωση των φερμιονίων, ας εξηγήσουμε γιατί και οι δύο παραπάνω απαντήσεις δίνουν λανθασμένο αποτέλεσμα για τη συνάρτηση επιμερισμού. Είναι προφανές, ότι γράφοντας το ολοκλήρωμα διαδρομών στο συνεχές, και τοποθετώντας τα κλασικά σύμβολα που βρήκαμε από τα δύο φεταρίσματα στη δράση, θα λάβουμε και στις δύο περιπτώσεις το ίδιο ολοκλήρωμα, μόνο που στο πρώτο φετάρισμα θα συνοδεύεται από έναν παράγοντα $e^{i\omega T}$ και στο δεύτερο από έναν παράγοντα $e^{-i\omega T}$. Αυτοί οι παράγοντες προκύπτουν φυσικά από την ολοκλήρωση στο χρόνο των σταθερών όρων των δύο κλασικών συμβόλων. Το δε ολοκλήρωμα διαδρομών που περισσεύει, είναι ακριβώς το ίδιο που είχαμε επιλύοντας το πρόβλημα του απλού αρμονικού

ταλαντωτή, με μόνες διαφορές εδώ το ότι οι μεταβλητές ολοκλήρωσης είναι Grassmann και το ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι αντιπεριοδικές. Όμως εξηγήσαμε πως η μόνη διαφορά Gaussian ολοκληρωμάτων συμβατικών και Grassmann μεταβλητών είναι ότι το αποτέλεσμα στην πρώτη περίπτωση είναι το αντίστροφο της ορίζουσας και στη δεύτερη η ίδια η ορίζουσα. Την ίδια στιγμή, οι αντιπεριοδικές συνθήκες αλλάζουν τις ιδιοτιμές που συμμετέχουν στον υπολογισμό της ορίζουσας, και τις κάνουν $\omega_n = \frac{i\pi}{T}(2n-1)$, n οποιοσδήποτε ακέραιος. Επομένως ζητάμε το γινόμενο:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\omega_m + i2\omega}{i\omega_m} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{2\omega T}{\pi(2n-1)}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{2\omega T}{\pi(2n-1)}\right)^2\right) = \cos(\omega T). \quad (7.48)$$

Αυτό το αποτέλεσμα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με έναν παράγοντα κανονικοποίησης, ο οποίος θα προκύψει από τον υπολογισμό του διαδότη του ελεύθερου σωματίου στο διακριτό, ακριβώς όπως εξηγήθηκε στην ενότητα 2.3. Ο παράγοντας αυτός προκύπτει ίσος με 2. Άρα το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι $e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}$. Όμως, μπορούμε πολύ εύκολα βρίσκοντας τις ενέργειες να υπολογίσουμε ότι αυτή ακριβώς είναι η σωστή συνάρτηση επιμερισμού γι' αυτό το σύστημα, οπότε πολλαπλασιάζοντας τις έξτρα φάσεις από τα παραπάνω κλασικά σύμβολα, τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε είναι λάθος.

Άρα χρειάζεται να ακολουθήσουμε μια άλλη πορεία και όχι της διακριτοποίησης, ακριβώς όπως και στα συστήματα των προηγούμενων κεφαλαίων, η οποία μάλιστα όπως είδαμε θα ήταν βολικό να περνάει από Ερμητιανούς τελεστές. Όπως θα δούμε αυτό θέλει πολύ προσοχή. Τονίζουμε τέλος, εκ νέου, ότι εδώ τα πράγματα είναι πολύ πιο εύκολα από ό,τι πριν, μιας και λόγω του ότι τα συστήματα είναι φερμιονικά, δε χρειάζεται να ανησυχούμε για ανώτερες τάξεις, όπου η διάταξη των τελεστών έχει σημασία. Εδώ δεν υπάρχουν όροι με πολλούς τελεστές λόγω του ότι οι τελεστές είναι μηδενοδύναμοι.

7.3 Φερμιόνια Majorana

Ας θυμηθούμε ότι οι μποζονικοί τελεστές δημιουργίας και καταστροφής μπορούν με έναν κανονικό μετασχηματισμό να μετασχηματιστούν σε Ερμητιανούς τελεστές (θέσης και ορμής). Αναλόγως κι εδώ, μπορεί κανείς να προσπαθήσει να αναλύσει τους φερμιονικούς τελεστές μέσω ενός παρόμοιου κανονικού μετασχηματισμού σε Ερμητιανούς. Πράγματι, ορίζονται οι τελεστές:

$$\hat{\gamma}_1 = \hat{a}^\dagger + \hat{a}, \quad (7.49)$$

$$\hat{\gamma}_2 = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (7.50)$$

Εύκολα αποδεικνύει κανείς ότι αυτοί οι τελεστές είναι Ερμητιανοί και ότι ικανοποιούν την άλγεβρα

$$\{\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b\} = 2\delta_{ab}\hat{I}. \quad (7.51)$$

Αυτοί οι τελεστές είναι οι λεγόμενοι τελεστές Majorana και τα φερμιόνια τα οποία κωδικοποιούν αναφέρονται ως φερμιόνια ή τρόποι Majorana (καλούνται φερμιόνια λόγω του ότι δυο διαφορετικοί τέτοιοι τελεστές αντιμετατίθενται, ενώ έχουν και την παράξενη ιδιότητα το τετράγωνό τους να ισούται με τη μονάδα). Εμφανίζονται πρώτη φορά στη μελέτη του Etori Majorana ο οποίος προσπάθησε να βρει αμιγώς πραγματικές λύσεις στην εξίσωση του Dirac στο πλαίσιο της θεωρίας πεδίου. Το ότι είναι Ερμητιανοί σημαίνει ότι κάθε τέτοιο σωματίο είναι και το αντισωματίό του, που σημαίνει ότι πρέπει η μάζα τους να είναι μηδενική (γί αυτό συχνά αναφέρονται και ως μηδενικοί τρόποι Majorana). Φερμιόνια μηδενικής μάζας δεν έχουν βρεθεί ως τώρα στη θεωρία πεδίου -εικάζεται ότι ενδεχομένως τα νετρίνα να είναι τέτοια αλλά η μάζα τους δεν έχει ακόμα διευκρινιστεί. Για το λόγο αυτό η ιδέα αυτή εγκαταλήφθηκε για αρκετά χρόνια ως μια απλή θεωρητική ακροβασία χωρίς κανένα απολύτως φυσικό ενδιαφέρον. Είναι αξιοσημείωτο όμως, ότι τα τελευταία χρόνια ακριβώς τέτοιου είδους σωματίια εμφανίστηκαν ως διεγέρσεις σε συστήματα της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στη σχέση τους με την κβαντική πληροφορική και στην ελπίδα που προσφέρουν για μη τοπική αποθήκευση της πληροφορίας. Προς το παρόν ας μείνουμε στο πλαίσιο που εμφανίστηκαν εδώ: είναι οι Ερμητιανοί τελεστές που χρειαζόμαστε για να ορίσουμε με συνέπεια το ολοκλήρωμα διαδρομών. Η ελπίδα μας είναι να φετάρουμε χρησιμοποιώντας τις ιδιοκαταστάσεις τους.

Ωστόσο, η κανονική κβάντωση αυτών των τελεστών είναι φοβερά περίπλοκη: δεν έχουν τον τόσο βολικό φορμαλισμό συνοχικών καταστάσεων που έχουν οι μη Ερμητιανοί ομόλογοί τους. Για την ακρίβεια, είναι αδύνατον να οριστεί με οποιοδήποτε τρόπο ο αντίστοιχος χώρος Hilbert. Ευτυχώς όμως, στην αναπαράσταση του ολοκληρώματος διαδρομών, η κβάντωση τους είναι εφικτή. Αυτό γίνεται θεωρώντας την ερμητιανότητα των τελεστών Majorana $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^\dagger$ ως ένα σύνδεσμο στο σύστημα και προχωρώντας με τη μέθοδο Faddeev-Jackiw [25], [27]. Έτσι, ορίζεται κατευθείαν το κλασικό σύμβολο στη δράση και το ολοκλήρωμα διαδρομών μπορεί από 'κει και πέρα να υπολογιστεί.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα στο οποίο μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, γράφουμε τη Hamiltonian συναρτήσε τελεστών Majorana. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\hat{H} = i\omega\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2. \quad (7.52)$$

Η μέθοδος που αναφέραμε πριν, επιβάλλει σ' αυτή την περίπτωση το κλασικό σύμβολο

$$H = i\omega\gamma_1\gamma_2. \quad (7.53)$$

Μέσω του κανονικού μετασχηματισμού

$$\gamma_1 = z + z^*, \quad (7.54)$$

$$\gamma_2 = i(z^* - z), \quad (7.55)$$

η κλασική Hamiltonian γίνεται:

$$H = 2\omega|z|^2, \quad (7.56)$$

η οποία όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι η σωστή συνάρτηση που πρέπει να εισαχθεί στη δράση του ολοκληρώματος διαδρομών για να πάρουμε τη γνωστή συνάρτηση επιμερισμού. Παρεμπιπτόντως, η ανάγκη της αναλλοιώτητας κάθε φέτας υπό κανονικούς μετασχηματισμούς, σε σύνδεση με τα προηγούμενα κεφάλαια, σε συνδυασμό με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε, επιβάλλει και εδώ στο διακριτό να υιοθετείται πάντα η συμμετροποιημένη εκδοχή.

Πριν κλείσουμε το κεφάλαιο, ένα σχόλιο πάνω στη σύνδεση της μεθόδου της γεωμετρικής κβάντωσης με τις φερμιονικές Hamiltonians. Αν θυμηθούμε τη συλλογιστική της γεωμετρικής κβάντωσης, όλα ξεκινάνε από τις διαφορικές μορφές οι οποίες αντιμετωπίζονται και ορίζονται ως παράγωγοι σε μια πολλαπλότητα. Μπορεί κανείς, όμως, να αγνοήσει όλη τη δομή που έχουν οι διαφορικές μορφές ως παράγωγοι, να αγνοήσει εντελώς και την υποφώσκουσα πολλαπλότητα, και να ορίσει στοιχεία τα οποία απλώς αντιμετωπίζονται, χωρίς καμία απολύτως πιο στοιχειώδη δομή. Αυτά τα αντικείμενα σχηματίζουν μια άλγεβρα, στοιχεία της οποίας είναι και οι αριθμοί Grassmann που αναφέραμε. Όπως είδαμε, μπορεί κανείς να ορίσει για αυτούς τους αριθμούς μια σειρά από μαθηματικές πράξεις σε πλήρη αναλογία με εκείνες των συμβατικών αριθμών. Η αναλογία μπορεί να προχωρήσει και να ορίσει κανείς υπερχώρους -τα ανάλογα των Ευκλείδειων χώρων- και υπερπολλαπλότητες -τα ανάλογα των πολλαπλοτήτων. Αυτές οι ιδέες βρίσκουν πρόσφορο έδαφος στο πλαίσιο της υπερσυμμετρίας, όπου εκτός από τις συνήθεις διαστάσεις υπάρχουν και διαστάσεις που οι συντεταγμένες τους είναι αριθμοί Grassmann. Εκεί, οι συμβατικές χωρικές διαστάσεις αντιστοιχούν σε μποζονικούς και οι αντιμετωπιζόμενες σε φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας.

Θα προτιμήσουμε να μην ανοίξουμε το κεφάλαιο της υπερσυμμετρίας εδώ, μιας και είναι τεράστιο. Και μόνο που για να ορίσουμε εξ αρχής την άλγεβρα των στοιχείων που μας αφορούν πρέπει να αποκαθλώσουμε την ιδέα της πολλαπλότητας, είναι προφανές ότι η μέθοδος που προτείναμε δε θα μπορούσε να εφαρμοστεί -δε θα ήμασταν καν σε θέση να αποφανθούμε για την πολλαπλότητα στην οποία δουλεύουμε. Αντ' αυτού, θα προτιμήσουμε την κατασκευή Faddeev-Jackiw η οποία μας δίνει με έναν απλό τρόπο όσα χρειαζόμαστε για να προχωρήσουμε στην επίλυση ολοκληρωμάτων διαδρομών με μεταβλητές Grassmann, δηλαδή στη διαχείριση συστημάτων με φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας.

Μέρος II

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ
ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ
ΜΑЈΟRΑΝΑ

Κεφάλαιο 8

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΧΥ ΜΕ ΠΕΔΙΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε ένα πάρα πολύ σημαντικό μοντέλο της φυσικής στερεάς κατάστασης, το λεγόμενο μοντέλο ΧΥ με εγκάρσιο πεδίο [5], [19]. Πρόκειται για μια μονοδιάστατη αλυσίδα αποτελούμενη από σωματίδια με spin $s = \frac{1}{2}$ τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Το μοντέλο αυτό έχει επιλυθεί ακριβώς θεωρητικά, υπάρχει μια πληθώρα αποτελεσμάτων γύρω απ' αυτό τα οποία έχουν εξαχθεί τόσο με θεωρητικές όσο και με υπολογιστικές μεθόδους, ενώ έχει τεράστιο ενδιαφέρον και από πειραματικής απόψεως. Ο σκοπός αυτού του κεφάλαιου δεν είναι να αποδώσει νέα αποτελέσματα αλλά να αναπαράγει τα ήδη γνωστά με μια νέα τεχνική. Με αυτό αποσκοπούμε στο να δείξουμε ότι με τις θεωρήσεις που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες έχει ανοίξει ο δρόμος για την εφαρμογή των τεχνικών του ολοκληρώματος διαδρομών σε πολυσωματιδιακά συστήματα. Το συγκεκριμένο σύστημα, και άλλα παρόμοια, πέραν του ενδιαφέροντος από τη σκοπιά της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης, είναι πολύ σημαντικό και για την κβαντική πληροφορική διότι υποστηρίζει διεμπλεγμένες καταστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτό το σύστημα υπάρχουν συσχετισμοί αμιγώς κβαντικής φύσεως -δεν έχουν κλασικό ανάλογο- οι οποίοι μπορούν να αξιοποιηθούν για αποθήκευση και επεξεργασία της κβαντικής πληροφορίας. Παρά τη σημασία αυτών των συστημάτων, οι πανίσχυρες τεχνικές του ολοκληρώματος διαδρομών δεν έχουν αξιοποιηθεί για την ανάλυσή τους. Ένας σοβαρός λόγος που συνέβαινε αυτό ως τώρα ήταν ότι δεν υπήρχε τρόπος συνεπούς ορισμού του ίδιου του ολοκληρώματος διαδρομών. Έτσι, τώρα που έχουμε εξηγήσει πώς μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο, είμαστε σε θέση να το αξιοποιήσουμε για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

8.1 Το μοντέλο ΧΥ με πεδίο

Η γενικότερη Hamiltonian που περιγράφει αλληλεπιδράσεις spin πλησιέστερων γειτόνων παρουσία εγκάρσιου πεδίου είναι η:

$$\hat{H} = - \sum_{j=1}^N (a_j \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x + b_j \hat{\sigma}_j^y \hat{\sigma}_{j+1}^y + c_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z + h_j \hat{\sigma}_j^z), \quad (8.1)$$

$\hat{\sigma}_j$ είναι οι πίνακες του Pauli, και επιτρέψαμε στις παραμέτρους του προβλήματος που περιγράφουν την αλληλεπίδραση των spin να ποικίλουν μεταξύ των πλεγματικών θέσεων. Εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εργαλείο του μετασχηματισμού Jordan-Wigner [26], [28] που είναι ένας μετασχηματισμός μεταξύ τελεστών spin για $s = \frac{1}{2}$ και τελεστών δημιουργίας και καταστροφής φερμιονίων:

$$\hat{\sigma}_j^+ = \hat{a}_j^\dagger e^{i\pi \sum_{l<j} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l}, \quad (8.2)$$

$$\hat{\sigma}_j^- = \hat{a}_j e^{-i\pi \sum_{l<j} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l}, \quad (8.3)$$

$$\hat{\sigma}_j^z = 1 - 2\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad (8.4)$$

όπου

$$\hat{\sigma}_j^\pm = \hat{\sigma}_j^x \pm i\hat{\sigma}_j^y. \quad (8.5)$$

Με το μετασχηματισμό αυτό, το μοντέλο μας γίνεται:

$$\begin{aligned} \hat{H} = - \sum_{j=1}^N [a_j (\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j) (\hat{a}_{j+1}^\dagger + \hat{a}_{j+1}) + b_j (\hat{a}_{j+1}^\dagger - \hat{a}_{j+1}) (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j) \\ + c_j (1 - 2\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j) (1 - 2\hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_{j+1}) + h_j (1 - 2\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j)]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Τώρα μπορούμε να εισάγουμε τους τελεστές Majorana

$$\hat{\gamma}_{2j-1} = \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j, \quad (8.7)$$

$$\hat{\gamma}_{2j} = i(\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j) \quad (8.8)$$

και σύμφωνα με την τεχνική Faddeev-Jackiw που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτοί μπορούν να αντικατασταθούν απευθείας στη Hamiltonian με κλασικά σύμβολα. Τότε το κλασικό σύμβολο αυτού του μοντέλου γίνεται:

$$H = i \sum_{j=1}^N [a_j \gamma_{2j} \gamma_{2j+1} + b_j \gamma_{2j+2} \gamma_{2j-1} + c_j \gamma_{2j-1} \gamma_{2j} \gamma_{2j+1} \gamma_{2j+2} + h_j \gamma_{2j-1} \gamma_{2j}]. \quad (8.9)$$

Όλες οι παραπάνω μεταβλητές είναι βέβαια Grassmann. Με τον κανονικό μετασχηματισμό

$$\gamma_{2j-1} = z_j^* + z_j, \quad (8.10)$$

$$\gamma_{2j} = i(z_j^* - z_j), \quad (8.11)$$

το κλασικό σύμβολο γράφεται

$$H = \sum_{j=1}^N [a_j(z_{j+1}^* + z_{j+1})(z_j^* - z_j) + b_j(z_j^* + z_j)(z_{j+1}^* - z_{j+1}) - 4c_j|z_j|^2|z_{j+1}|^2 + 2h_j|z_j|^2]. \quad (8.12)$$

8.2 Συναρτήσεις συσχετισμού

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές του ολοκληρώματος διαδρομών για να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις συσχετισμού αυτού του μοντέλου. Είναι γνωστό ότι αυτό το μοντέλο παρουσιάζει μια χβαντική μετάβαση φάσης. Σε εκείνο το σημείο -κρίσιμο σημείο- η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος εμφανίζει μακράς εμβέλειας χβαντικούς συσχετισμούς, το οποίο μας παραπέμπει σε ύπαρξη διεμπλοκής.

Ορίζουμε τις συζεύξεις και το πεδίο ως $a_j = \frac{1+r}{2}$, $b_j = \frac{1-r}{2}$, $c_j = 0$, $h_j = h$. Με αυτή την επιλογή παραμέτρων το μοντέλο παρουσιάζει αναλλοιώτητα μεταφοράς (όλες οι πλεγματικές θέσεις έχουν τις ίδιες παραμέτρους) αλλά ανισοτροπία ως προς τις τρεις διευθύνσεις spin (αφού οι συζεύξεις μεταξύ των συνιστωσών του spin στους τρεις άξονες διαφέρουν). Έτσι, προκύπτει το μοντέλο XY παρουσία εγχάρσιου πεδίου.

Επειδή ενδιαφερόμαστε για τις συναρτήσεις συσχετισμού, θα εισάγουμε στη δράση πηγές των πεδίων Grassmann. Επίσης θα θέσουμε πάλι $\hbar = 1$ ενώ επειδή είμαστε σε πολυσωματιδιακό σύστημα είναι βολικό να κάνουμε τη στροφή Wick και να δουλέψουμε σε φανταστικό χρόνο. Τότε, η γεννήτρια συνάρτηση ορίζεται ως:

$$Z = \int_{AP} \mathcal{D}z^* \mathcal{D}z e^{-\int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau [\sum_{j=1}^N z_j^* \dot{z}_j + H - i \sum_{j=1}^N (J_j^* z_j + z_j^* J_j)]}. \quad (8.13)$$

Όντως, στο όριο $\beta \rightarrow \infty$ με μια απλή συναρτησιακή παραγωγή είμαστε σε θέση να εξάγουμε τις τετραγωνικές συναρτήσεις συσχετισμού για το κενό της θεωρίας (τη θεμελιώδη). Για παράδειγμα,

$$\langle \hat{T}(\hat{a}_b^\dagger(\tau_2) \hat{a}_a(\tau_1)) \rangle = \frac{\delta^2 \ln Z}{\delta J_b(\tau_2) \delta J_a^*(\tau_1)} \Big|_{J=0}, \quad (8.14)$$

όπου ο τελεστής \hat{T} είναι ο τελεστής χρονικής διάταξης. Στην περίπτωση που $a = b$ και $\tau_1 = \tau_2$ ταυτόχρονα, αναμένουμε να εμφανίζονται ακριβώς τα ίδια προβλήματα που παρουσιάζονται και στην ταυτοποίηση του κλασικού συμβόλου της δράσης, οπότε σε εκείνη την περίπτωση θα πρέπει να προστεθεί ένας παράγοντας $\frac{1}{2}$ στην παραπάνω, διότι σύμφωνα με τη μέθοδο Faddeev-Jackiw ισχύει η ανταπόκριση $\hat{a}^\dagger \hat{a} \rightarrow |z|^2 + \frac{1}{2}$. Θα προχωρήσουμε με το μετασχηματισμό Fourier στα πεδία και στις πηγές:

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(m+\frac{1}{2})j} c_m, \quad (8.15)$$

$$J_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(m+\frac{1}{2})j} \lambda_m. \quad (8.16)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός συνεπάγεται την αντιπεριοδική συνθήκη $z_{N+1} = -z_1$ και αντιστοιχεί στην περίπτωση του άρτιου συνολικού αριθμού φερμιονίων στην αλυσίδα. Φυσικά, δεν αναφερόμαστε στα πραγματικά φερμιόνια της αλυσίδας που φέρουν τους spin βαθμούς ελευθερίας -αυτά είναι N στον αριθμό και η αντιπεριοδικότητα δεν έχει καμία σχέση με αυτό. Αναφερόμαστε στα φερμιόνια στα οποία μετασχηματίστηκαν τα spin μέσω του μετασχηματισμού Jordan-Wigner. Για περιττό αριθμό φερμιονίων, πρέπει να κάνουμε την αλλαγή $m + \frac{1}{2} \rightarrow m$. Αυτή η θεώρηση προέρχεται από το ότι η αρχική Hamiltonian μετατίθεται με τον τελεστή της συνολικής ομοτιμίας $\hat{P} = \prod_{j=1}^N \hat{\sigma}_j^z$ ο οποίος με το μετασχηματισμό Jordan-Wigner γίνεται $\hat{P} = e^{i\pi\hat{N}}$, $\hat{N} = \sum_{j=1}^N \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$. Άρα, ο χώρος Hilbert διαιρείται σε δύο υπόχωρους-τομείς, καθένας εκ των οποίων χαρακτηρίζεται από την ιδιοτιμή του τελεστή ομοτιμίας -προφανώς οι ιδιοτιμές είναι 1, -1. Για να ξεχωρίζουμε σε ποιον τομέα αναφερόμαστε, θα χρησιμοποιούμε τους δείκτες $(e)/(o)$ για τους υπόχωρους άρτιου και περιττού αριθμού φερμιονίων αντίστοιχα. Έτσι, η Hamiltonian γίνεται:

$$H^{(e)} = \sum_{m=0}^{N/2-1} H_m^{(e)}, \quad (8.17)$$

$$H_m^{(e)} = 2 \begin{pmatrix} c_m^* & c_{N-m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_m^{(e)} & -il_m^{(e)} \\ il_m^{(e)} & -k_m^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_m \\ c_{N-m-1}^* \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} c_m^* & c_{N-m-1} \end{pmatrix} h_m^{(e)} \begin{pmatrix} c_m \\ c_{N-m-1}^* \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

όπου

$$k_m^{(e)} = h - \cos \frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad (8.19)$$

$$l_m^{(e)} = r \sin \frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2} \right). \quad (8.20)$$

Ο τρόπος που χωρίσαμε τη Hamiltonian σε επιμέρους όρους προέκυψε από το ότι τα διάφορα πεδία συμμετέχουν σε έναν όρο μόνο -κάθε c_m αλληλεπιδρά μόνο με τα c_m^* , c_{N-m-1} και το συζυγές του με τα αντίστοιχα συζυγή. Επίσης, θεωρήσαμε για ευκολία το N άρτιο (το οποίο δεν είναι πρόβλημα μιας και θέλουμε να μελετήσουμε την κβαντική μετάβαση φάσης η οποία εκδηλώνεται στο θερμοδυναμικό όριο $N \rightarrow \infty$). Έτσι η συνάρτηση επιμερισμού μπορεί να παραγοντοποιηθεί:

$$Z^{(e)} = \prod_{m=0}^{N/2-1} \int_{AP} \mathcal{D}c_m^* \mathcal{D}c_m \mathcal{D}c_{N-m-1}^* \mathcal{D}c_{N-m-1} e^{-S_m^{(e)}[J]}, \quad (8.21)$$

όπου

$$S_m^e[J] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [c_m^* \dot{c}_m + c_{N-m-1}^* \dot{c}_{N-m-1} + H_m^{(e)} - i(\lambda_m^* c_m + c_m^* \lambda_m + \lambda_{N-m-1}^* c_{N-m-1} + c_{N-m-1}^* \lambda_{N-m-1})]. \quad (8.22)$$

Η κάθε επιμέρους Hamiltonian είναι πλέον εύκολο να διαγωνοποιηθεί. Αυτό γίνεται με ένα μετασχηματισμό Bogoliubov:

$$h_m^{(e)} = U_m^{(e)} \begin{pmatrix} \epsilon_m^{(e)} & 0 \\ 0 & -\epsilon_m^{(e)} \end{pmatrix} U_m^{(e)\dagger} \quad (8.23)$$

$$U_m^{(e)} = \begin{pmatrix} \cos\theta_m^{(e)} & i\sin\theta_m^{(e)} \\ i\sin\theta_m^{(e)} & \cos\theta_m^{(e)} \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

$$\epsilon_m^{(e)} = 2\sqrt{\left(h - \cos\frac{2\pi}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + r^2 \sin^2\frac{2\pi}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)}, \quad (8.25)$$

$$\tan 2\theta_m^{(e)} = \frac{r \sin\frac{2\pi}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)}{h - \cos\frac{2\pi}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)}. \quad (8.26)$$

Με την αλλαγή

$$\begin{pmatrix} c_m \\ c_{N-m-1}^* \end{pmatrix} = U_m^{(e)} \begin{pmatrix} \xi_m \\ \xi_{N-m-1}^* \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

οι επιμέρους δράσεις γίνονται

$$S_m^{(e)}[J] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (\phi_m^\dagger D_m^{(e)} \phi_m - i\mu_m^\dagger \dot{\phi}_m - i\phi_m^\dagger \dot{\mu}_m), \quad (8.28)$$

όπου

$$\phi_m = \begin{pmatrix} \xi_m \\ \xi_{N-m-1}^* \end{pmatrix}, \quad (8.29)$$

$$\mu_m^\dagger = (\lambda_m^* \quad \lambda_{N-m-1}), \quad (8.30)$$

$$D_m^{(e)} = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \epsilon_m^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_\tau - \epsilon_m^{(e)} \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

Σημειώνουμε ότι η αλλαγή μεταβλητής (8.27) που οδήγησε στη διαγωνοποίηση επιτρέπεται μόνο και μόνο αν επιλεγεί η συμμετροποιημένη εκδοχή της δράσης στο διακριτό. Τώρα, το ολοκλήρωμα διαδρομών είναι Gaussian με πηγές, οπότε μπορεί να υπολογιστεί εύκολα:

$$Z^{(e)} = \prod_{m=0}^{N/2-1} Z_m^{(e)}[0] \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \mu_m^\dagger(\tau) (D_m^{(e)})^{-1}(\tau - \tau') \mu_m(\tau')\right), \quad (8.32)$$

$$(D_m^{(e)})^{-1} = \begin{pmatrix} G_m^{(+)} & 0 \\ 0 & G_m^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (8.33)$$

$$G_m^{(\pm)}(\tau - \tau') = \pm \Theta(\pm(\tau - \tau')) e^{\pm(\tau' - \tau)\epsilon_m^{(e)}}. \quad (8.34)$$

Η $G_m^{(+)}$ η οποία διαδίδει τους m τρόπους προς τα εμπρός στο χρόνο έχει επιλεχθεί να ικανοποιεί την αιτότητα, όπως υποδεικνύει η συνάρτηση Heavyside στη λύση της (για την οποία πρέπει να κάνουμε την επιλογή $\Theta(0) = \frac{1}{2}$ για λόγους συνέπειας του ορισμού του ολοκληρώματος διαδρομών), ενώ η $G_m^{(-)}$ που διαδίδει τους συζυγείς $N - m - 1$ τρόπους προς τα πίσω στο χρόνο ικανοποιεί την αντίθετη συνοριακή συνθήκη: μηδενίζεται για όλα τα $\tau > \tau'$. Ο δε παράγοντας $Z_m^{(e)}[0]$ είναι ο γνωστός παράγοντας κανονικοποίησης ως προς την περίπτωση χωρίς πηγές -είναι ακριβώς η συνάρτηση επιμερισμού χωρίς πηγές- τον οποίο μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε [24].

Για να το κάνουμε αυτό παρατηρούμε ότι μπορούμε πολύ εύκολα να αποδείξουμε ότι $\hat{P} = e^{i\pi\hat{N}_q}$, $\hat{N}_q = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{\xi}_m^\dagger \hat{\xi}_m$. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί πραγματοποιώντας το μετασχηματισμό (8.27) στο επίπεδο των τελεστών και όχι σε εκείνο των κλασικών μεταβλητών της δράσης. Εξ άλλου, προβάλλουμε τη συνάρτηση επιμερισμού στους δύο υπόχωρους καθορισμένης ομοτιμίας, και αφού $\hat{P} = e^{i\pi\hat{N}} = e^{i\pi\hat{N}_q}$

$$Z[0] = \text{tr}[e^{-\beta\hat{H}}] = \frac{1}{2} \text{tr}[(\hat{I} + e^{i\pi\hat{N}_q})e^{-\beta\hat{H}^{(e)}}] + \frac{1}{2} \text{tr}[(\hat{I} - e^{i\pi\hat{N}_q})e^{-\beta\hat{H}^{(o)}}] \equiv Z^{(e)}[0] + Z^{(o)}[0]. \quad (8.35)$$

Μας ενδιαφέρει ο άρτιος υπόχωρος, οπότε θα υπολογίσουμε μόνο τον πρώτο όρο αυτής της σχέσης. Η ποσότητα $\text{tr}[e^{-\beta\hat{H}^{(e)}}]$ είναι φυσικά απλά η συνάρτηση επιμερισμού για N φερμιονικούς ταλαντωτές με ενέργειες ϵ_m όπως φαίνεται εύκολα από τη διαδικασία διαγωνοποίησης, οπότε την έχουμε ήδη υπολογίσει -η μόνη διαφορά είναι ότι δουλεύουμε σε φανταστικό χρόνο, οπότε το συνημίτονο γίνεται υπερβολικό συνημίτονο:

$$\text{tr}[e^{-\beta\hat{H}^{(e)}}] = \int_{AP} \prod_{m=0}^{N-1} (\mathcal{D}\xi_m^* \mathcal{D}\xi_m) e^{-\int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} [\sum_{m=0}^{N-1} (\xi_m^* \dot{\xi}_m - \epsilon_m^{(e)} \xi_m^* \xi_m)]} = \prod_{m=0}^{N-1} 2 \cosh\left(\frac{\beta\epsilon_m^{(e)}}{2}\right). \quad (8.36)$$

Για το δεύτερο παράγοντα του πρώτου όρου, παρατηρούμε ότι $[\hat{N}_q, \hat{H}^{(e)}] = 0$ οπότε τα δύο εκθετικά μέσα στο ίχνος μπορούν να συγκεντρωθούν σε ένα δίνοντας

$$\begin{aligned} \text{tr}[e^{i\pi\hat{N}_q}e^{-\beta\hat{H}^{(e)}}] &= \text{tr}[e^{i\pi\hat{N}_q-\beta\hat{H}^{(e)}}] = i^N \text{tr}e^{-\beta\sum_{m=0}^{N-1}(\epsilon_m^{(e)}-\frac{i\pi}{\beta})(\hat{\xi}_m^\dagger\hat{\xi}_m-\frac{1}{2})} = \\ i^N \int_{AP} \prod_{m=0}^{N-1} (\mathcal{D}\xi_m^* \mathcal{D}\xi_m) e^{-\int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} [\sum_{m=0}^{N-1}(\xi_m^*\dot{\xi}_m - (\epsilon_m^{(e)}-\frac{i\pi}{\beta})\xi_m^*\xi_m)]} &= \prod_{m=0}^{N-1} 2\sinh\left(\frac{\beta\epsilon_m^{(e)}}{2}\right). \end{aligned} \quad (8.37)$$

Έτσι,

$$Z^{(e)}[0] = \frac{1}{2} \left[\prod_{m=0}^{N-1} 2\cosh\left(\frac{\beta\epsilon_m^{(e)}}{2}\right) + \prod_{m=0}^{N-1} 2\sinh\left(\frac{\beta\epsilon_m^{(e)}}{2}\right) \right]. \quad (8.38)$$

Προφανώς, η συνάρτηση επιμερισμού του περιττού τομέα είναι ίδια με αυτή, με μόνες διαφορές την αλλαγή $m + \frac{1}{2} \rightarrow m$ και ένα σχετικό πρόσημο μείον μεταξύ των δύο όρων. Αυτός ο παράγοντας κανονικοποίησης δεν υπεισέρχεται στις συναρτήσεις συσχετισμού τελεστών που διατηρούν τον τομέα. Με δράση των συναρτησιακών παραγώγων στη γεννήτρια συνάρτηση όπως εξηγήθηκε πριν, προκύπτουν οι παρακάτω:

$$\left\langle \hat{T}\hat{a}_b(\tau_2)\hat{a}_a^\dagger(\tau_1) \right\rangle^{(e)} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(m+\frac{1}{2})(b-a)} (\cos^2\theta_m G_m^{(+)}(\tau_2-\tau_1) + \sin^2\theta_m G_m^{(-)}(\tau_2-\tau_1)), \quad (8.39)$$

$$\left\langle \hat{T}\hat{a}_b^\dagger(\tau_2)\hat{a}_a(\tau_1) \right\rangle^{(e)} = -\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(m+\frac{1}{2})(b-a)} (\cos^2\theta_m G_m^{(+)}(\tau_1-\tau_2) + \sin^2\theta_m G_m^{(-)}(\tau_1-\tau_2)), \quad (8.40)$$

$$\left\langle \hat{T}\hat{a}_b^\dagger(\tau_2)\hat{a}_a^\dagger(\tau_1) \right\rangle^{(e)} = \frac{i}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(m+\frac{1}{2})(b-a)} \sin 2\theta_m (G_m^{(+)}(\tau_1-\tau_2) - G_m^{(-)}(\tau_1-\tau_2)), \quad (8.41)$$

$$\left\langle \hat{T}\hat{a}_b(\tau_2)\hat{a}_a(\tau_1) \right\rangle^{(e)} = -\frac{i}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(m+\frac{1}{2})(b-a)} \sin 2\theta_m (G_m^{(+)}(\tau_2-\tau_1) - G_m^{(-)}(\tau_2-\tau_1)). \quad (8.42)$$

Οι δύο πρώτες εξ αυτών στην περίπτωση ίσων χρόνων και ίδιων πλεγματικών δεικτών λαμβάνουν έναν ακόμη παράγοντα $\frac{1}{2}$ όπως εξηγήθηκε πριν. Παρατηρούμε ότι ανταλλάζοντας τα τ_1, τ_2 και τα a, b στην (8.40) και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με την (8.39) συνάγουμε ότι $\left\langle \hat{T}\hat{a}_b(\tau_2)\hat{a}_a^\dagger(\tau_1) \right\rangle^{(e)} = -\left\langle \hat{T}\hat{a}_a^\dagger(\tau_1)\hat{a}_b(\tau_2) \right\rangle^{(e)}$ πράγμα αναμενόμενο μιας και οι τελεστές αντιμετατίθενται. Με την ίδια ανταλλαγή στην

(8.42) και συγκρίνοντας με την (8.41) προκύπτει η επίσης αναμενόμενη σχέση $\langle \hat{T}^\dagger \hat{a}_a^\dagger(\tau_1) \hat{a}_b^\dagger(\tau_2) \rangle^{(e)*} = \langle \hat{T} \hat{a}_b(\tau_2) \hat{a}_a(\tau_1) \rangle^{(e)}$.

Απ' αυτές, μπορεί να υπολογιστεί και η συνάρτηση συσχετισμού (επίσης χρονικά διατεταγμένη) για τα φερμιόνια Majorana:

$$iB_{ba}^{(e)}(\tau_2 - \tau_1) = \langle \hat{T} \hat{\gamma}_{2b}(\tau_2) \hat{\gamma}_{2a-1}(\tau_1) \rangle^{(e)}. \quad (8.43)$$

Για να επανέλθουμε σε πραγματικούς χρόνους ξανακάνουμε τη στροφή Wick $\tau \rightarrow it$ και προκύπτει:

$$B_{ba}^{(e)}(t_2 - t_1) = -\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(m+\frac{1}{2})(b-a)} e^{-2i\theta_m^{(e)}} e^{-ie_m^{(e)}|t_2-t_1|}. \quad (8.44)$$

Σημειώστε ότι στην περίπτωση $a = b$, $t_2 = t_1$ δεν έχουμε έξτρα παράγοντα σε αυτή λόγω του ότι οι αντίστοιχες συνεισφορές από τις συναρτήσεις συσχετισμού μεταξύ των συμβατικών φερμιονίων αλληλοαναιρούνται. Επίσης, η συνάρτηση συσχετισμού δεν εξαρτάται από τις ακριβείς τιμές t_1 , t_2 αλλά μόνο από τη διαφορά τους. Αυτό συμβαίνει λόγω της αναλλοιώτητας του συστήματος ως προς χρονικές μεταθέσεις, η οποία οφείλεται στο ότι το σύστημα είναι κλειστό -δεν υπάρχουν περιβαλλοντικές επιρροές- και στο ότι οι παράμετροι είναι σταθερές στο χρόνο. Επίσης υπάρχει και μεταφορική αναλλοιώτητα διότι οι παράμετροι είναι ίδιες για κάθε πλεγματοτικό τόπο, και αυτό εκδηλώνεται στην εξάρτηση των συναρτήσεων συσχετισμού μονάχα από τη διαφορά μεταξύ των δεικτών των πλεγματοτικών τόπων $b - a$ και όχι από τις ακριβείς τους τιμές.

Επιπλέον τονίζουμε ότι οι συναρτήσεις συσχετισμού που υπολογίσαμε δεν έχουν πολύ καθαρή φυσική ερμηνεία ως προς τους αρχικούς τελεστές spin. Αυτό πηγάζει από τη μη τοπική φύση του μετασχηματισμού Jordan-Wigner: συνδέει τους τελεστές spin κάθε πλεγματοτικού σημείου όχι μόνο με τους φερμιονικούς τελεστές σε εκείνο το σημείο αλλά και με τους φερμιονικούς τελεστές σε κάθε προηγούμενο. Έτσι, γίνεται ιδιαίτερα περίπλοκη η ερμηνεία των συγκεκριμένων ποσοτήτων υπό όρους των αρχικών τελεστών spin.

Αυτό που υπολογίστηκε εδώ είναι η συνάρτηση συσχετισμού μεταξύ των φερμιονίων Majorana. Σημειώνουμε ότι μετά το μετασχηματισμό Jordan-Wigner η Hamiltonian του XY μοντέλου χαρτογραφήθηκε σε μια Hamiltonian υπεραγωγού αφού έχει γίνει η προσέγγιση μέσου πεδίου, οπότε μοιραία εμφανίστηκαν φερμιόνια Bogoliubov κατά τη διαδικασία της διαγωνοποίησης.

Ο λόγος που υπολογίσαμε τη συνάρτηση επιμερισμού είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων περί της εντροπίας διεμπλοκής κοντά στο κρίσιμο σημείο και για τους κρίσιμους εκθέτες. Αλλά φυσικά τα κρίσιμα σημεία, οι κρίσιμοι εκθέτες και οι νόμοι εξέλιξης της εντροπίας δεν έχουν να κάνουν με το ποιους βαθμούς ελευθερίας χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε το σύστημα. Οπότε η δυσκολία της ερμηνείας των αποτελεσμάτων υπό όρους spin είναι άσχετη με το σκοπό μας.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι η τετραγωνική φύση της φερμιονικής Hamiltonian διασφαλίζει ότι όλες οι συναρτήσεις συσχετισμού τάξης ανώτερης του 2

μηδενίζονται, οπότε πράγματι η συνάρτηση συσχετισμού που υπολογίσαμε είναι επαρκής για να περιγράψει όλους τους συσχετισμούς που υπάρχουν στο σύστημα.

Στο θερμοδυναμικό όριο $N \rightarrow \infty$ όπου και αναμένεται να εκδηλωθεί η χβαντική μετάβαση φάσης η παραπάνω γίνεται:

$$B_l(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{il\phi - 2i\theta(\phi)} e^{-i|t|\epsilon(\phi)}, \quad (8.45)$$

$$\theta(\phi) = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{r \sin \phi}{h - \cos \phi}, & h - \cos \phi > 0 \\ \tan^{-1} \frac{r \sin \phi}{h - \cos \phi} + \pi, & h - \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (8.46)$$

$$\epsilon(\phi) = 2\sqrt{(h - \cos \phi)^2 + r^2 \sin^2 \phi}. \quad (8.47)$$

Σε αυτό το όριο, επίσης, οι συναρτήσεις συσχετισμού και οι υπόλοιπες ποσότητες των δύο τομέων (ενέργειες κλπ) ταυτίζονται, οπότε πράγματι η κατασκευή μας δε θα επιφέρει καθόλου επιπλοκές και από 'δω και μπρος ο διαχωρισμός μεταξύ των τομέων χάνει τη σημασία του -παρατηρήστε ότι η ποσότητα ολοκλήρωσης θα ήταν σε κάθε περίπτωση ϕ , είτε για m είτε για $m + \frac{1}{2}$ στον εκθέτη. Επίσης, έχουμε γράψει τη συνάρτηση συσχετισμού συναρτήσει της χρονικής διαφοράς t και της διαφοράς μεταξύ των πλεγματικών θέσεων l εκμεταλλευόμενοι την αναλλοιώτητα υπό χρονικές και υπό χωρικές μεταθέσεις.

Τώρα, αν θέσουμε $r = 0$ (δηλαδή επιβάλλουμε ισοτροπία στις x, y διευθύνσεις) προκύπτει το λεγόμενο μοντέλο XX. Αν είναι και $|h| \leq 1$ η συνάρτηση συσχετισμού γίνεται:

$$B_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{il\phi} \text{sgn}(\cos \phi - h) e^{-i2|t||\cos \phi - h|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\phi_h}^{\phi_h} d\phi e^{il\phi} \cos(2t(\cos \phi - h)), \quad (8.48)$$

όπου ορίσαμε τη γωνία ϕ_h για την οποία $\cos \phi_h = h$. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί και δίνει:

$$B_l(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(2t) \frac{\sin[(l+k)\phi_h]}{l+k} \cos(2ht - \frac{k\pi}{2}), \quad (8.49)$$

όπου J_k είναι οι συναρτήσεις Bessel. Αν ενδιαφερόμαστε για το στατικό αποτέλεσμα προφανώς πρέπει να πάρουμε το όριο $t \rightarrow 0$. Τότε μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε από την (8.48):

$$B_l(0) = \frac{2\sin(l\phi_h)}{\pi l}. \quad (8.50)$$

Κοντά στο κρίσιμο σημείο $h = 1$, βρίσκουμε $\phi_h \simeq \sqrt{2\lambda}$, $\lambda \equiv 1 - h \rightarrow 0^+$. Είναι εμφανές ότι σ' αυτή την τιμή για το h οι συσχετίσεις εκμηδενίζονται. Άρα, αυτή η τιμή ορίζει την κλίμακα όπου κυριαρχούν οι ισχυρές ταλαντώσεις και καταστρέφουν τις συσχετίσεις, οπότε το μήκος συσχέτισης κλιμακώνεται ως $\xi \sim \lambda^{-\frac{1}{2}} \sim \lambda^{-\nu}$. Άρα ο κρίσιμος εκθέτης είναι $\nu = \frac{1}{2}$ [20]. Για $t \rightarrow \infty$ η έκφραση (8.49) τείνει

στο μηδέν ως $B_l \sim |t|^{-1/2}$, εκτός από την περιοχή κοντά στο κρίσιμο σημείο όπου έχουμε ταλαντωτική συμπεριφορά:

$$B_l(t) \simeq \frac{2}{\pi l} \sin(\phi_h l) \cos(2t\lambda). \quad (8.51)$$

Από αυτή την εξίσωση μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη χρονική κλίμακα μετά την οποία οι ισχυρές ταλαντώσεις καταποντίζουν τις συσχετίσεις: $t \sim \lambda^{-1} \sim \xi^2$. Ο δε δυναμικός κρίσιμος εκθέτης ορίζεται από την εξίσωση $t \sim \xi^z$, οπότε εδώ $z = 2$. Άρα, η εντροπία διεμπλοκής στη γειτονιά του κρίσιμου σημείου κλιμακώνεται ως $S \sim \frac{1}{3} \log \xi \sim \frac{1}{6} \log t$.

8.3 Χρονοεξαρτώμενο μαγνητικό πεδίο

Παρατηρήστε ότι το h είναι η παράμετρος που συνοδεύει την προβολή του spin στον άξονα z , το οποίο σημαίνει ότι ο αντίστοιχος όρος στη Hamiltonian είναι η ενέργεια Zeeman, δηλαδή αυτή η παράμετρος παριστάνει ένα μαγνητικό πεδίο ευθυγραμμισμένο με τον άξονα των z -εναλλακτικά μπορούμε να φανταστούμε ένα τυχόν μαγνητικό πεδίο και κατόπιν να ορίσουμε το σύστημα αξόνων με τρόπο ώστε αυτό το πεδίο να δείχνει προς τον άξονα z .

Σ' αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε πάλι το μοντέλο ΧΥ, αλλά θα επιτρέψουμε στο πεδίο να έχει χρονική εξάρτηση. Η δυναμική της διεμπλοκής για χρονοεξαρτώμενα πεδία έχει μελετηθεί κατά κύριο λόγο αριθμητικά [1], [31], [32]. Εδώ θα ασχοληθούμε με μια αναλυτική προσέγγιση του θέματος. Συγκεκριμένα, θα βρούμε μια συνάρτηση συσχετισμού μεταξύ φερμιονικών πεδίων ορισμένων την ίδια χρονική στιγμή, για χρονοεξαρτώμενο μαγνητικό πεδίο. Είναι προφανές ότι η δυναμική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου θα έχει σαν αποτέλεσμα οι ιδιοενέργειες καθώς και οι πίνακες διαγωνοποίησης να έχουν επίσης χρονική εξάρτηση, μιας και εξαρτώνται από το πεδίο. Επίσης, το σύστημα σε αυτή την περίπτωση βρίσκεται εκτός ισορροπίας. Άρα, η μελέτη δε θα είναι τόσο απλή.

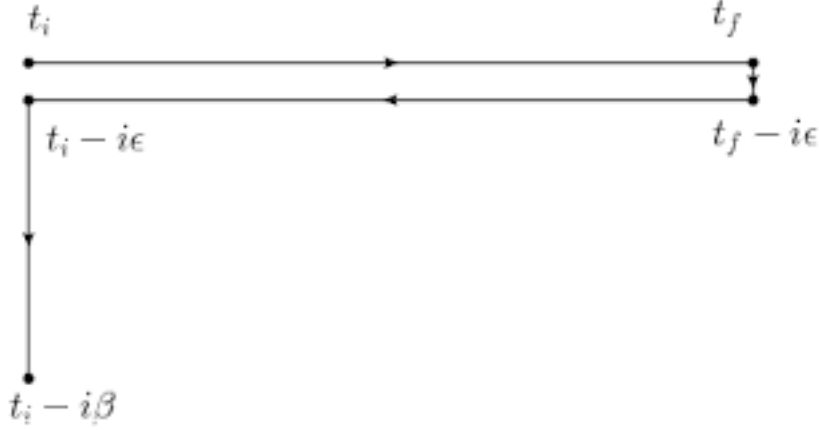
Ενδιαφερόμαστε για ποσότητες της μορφής $\langle \hat{O}_H(t) \rangle \equiv \text{tr} [\hat{\rho}_{in} \hat{O}_H(t)]$, όπου $\hat{\rho}_{in} = \hat{\rho}(-T)$ είναι ο αρχικός πίνακας πυκνότητας τη στιγμή $-T$ και \hat{O}_H είναι ένας τελεστής Heisenberg:

$$\hat{O}_H(t) = \hat{U}(-T, t) \hat{O}_{in} \hat{U}(t, -T), \quad \hat{U}(t, -T) \equiv \hat{T} e^{-i \int_{-T}^t dt' \hat{H}(t')}. \quad (8.52)$$

Θεωρούμε ότι αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία

$$\hat{\rho}_{in} = \frac{e^{-\beta \hat{H}_{in}}}{Z_{in}(\beta)}, \quad (8.53)$$

όπου $Z_{in}(\beta)$ είναι η συνάρτηση συσχετισμού ως προς την \hat{H}_{in} και \hat{H}_{in} είναι η Hamiltonian τη στιγμή $-T$, όπου το πεδίο έχει την αρχική του τιμή $h_{in} = h(-T)$. Για μηδενική θερμοκρασία $\beta \rightarrow \infty$ και αν η θεμελιώδης είναι μοναδική, ο πίνακας πυκνότητας γίνεται $\hat{\rho}_{in} = |0_{in}\rangle \langle 0_{in}|$. Αν η θεμελιώδης δεν είναι μοναδική, έχουμε

Σχήμα 8.1: Η περιοχή Keldysh C .

ισοπίθανη μίξη εκφυλισμένων καταστάσεων. Θεωρούμε τώρα την εξής έκφραση:

$$\langle \hat{O}_H(t) \rangle = \text{tr} \left[\hat{\rho}_{in} \hat{U}(-T, T) \hat{U}(T, t) \hat{O}_{in} \hat{U}(t, -T) \right]. \quad (8.54)$$

Αυτός είναι ο λεγόμενος φορμαλισμός Schwinger-Keldysh [63]. Σ' αυτό το φορμαλισμό ο χρόνος γίνεται μιγαδικός και ορίζεται επί της περιοχής P , που περικλείει τον πραγματικό άξονα t , από $t_{in+} \equiv -T + i0$ ως $t_{in-} \equiv -T - i0$ και αποτελείται από δύο γραμμές: την L_+ που συνδέει τα σημεία $-T + i0$ και $T + i0$ -επί της οποίας ονομάζουμε το χρόνο t_+ - και την L_- που συνδέει τα σημεία $T - i0$ και $-T - i0$ -επί της οποίας ονομάζουμε το χρόνο t_- . Έτσι, χρόνοι επί της L_+ προηγούνται πάντα των χρόνων επί της L_- . Για μη μηδενική θερμοκρασία η περιοχή αυτή επεκτείνεται παράλληλα στο φανταστικό άξονα, από το σημείο $-T - i0$ ως το $-T - i\beta$ με την αντίστοιχη γραμμή να ονομάζεται L_β . Η όλη περιοχή αποκαλείται C (βλ. Σχήμα 7.1· εδώ δουλεύουμε με $t_i = -T$, $t_f = T$). Δε θα αναλωθούμε εδώ σε μακροσκελείς εξηγήσεις πάνω στο φορμαλισμό Keldysh, παρά θα χρησιμοποιήσουμε έτοιμα τα εργαλεία που παρέχει. Αρχούμαστε να επισημάνουμε, ότι με αυτή τη θεώρηση παρακάμπτονται προβλήματα που έχουν να κάνουν με το ότι σε συστήματα που δεν είναι σε θερμική ισορροπία, η αδιαβατική εξέλιξη από τη θεμελιώδη σε κάποια χρονική στιγμή στη θεμελιώδη σε κάποια άλλη δεν είναι πάντα εφικτή -ιδίως αν παρέλθει μετάβαση φάσης.

Κάθε όρος της (8.54) μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα διαδρομών, πλην όμως εδώ ο χρόνος θα τρέχει σε όλη την περιοχή P . Τότε, η γεννήτρια συνάρτηση για τις αναμενόμενες τιμές εκτός ισορροπίας -σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση του φανταστικού χρόνου που μελετήσαμε- προκύπτει

$$Z[J] = \frac{1}{Z_{in}(\beta)} \int_{AP} \mathcal{D}^2 \vec{z}(t_C) e^{i \int_C dt_C [i \vec{z}^* \dot{\vec{z}} - H_{XY}(\vec{z}^*, \vec{z})] - i \int_C dt_C \vec{J}^* \vec{z} - i \int_C dt_C \vec{z}^* \vec{J}}, \quad (8.55)$$

όπου το διάνυσμα συνοψίζει όλες τις μεταβλητές του συστήματος. Όπως είπαμε, ο χρόνος εδώ τρέχει στην περιοχή C , ενώ τα πεδία $\vec{z}(t_{\pm}) \equiv \vec{z}_{\pm}(t)$ θεωρούνται ανεξάρτητα. Θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ίδιο κατά μήκος των L_{\pm} : $h_+(t) = h_-(t)$, και ότι κατά μήκος της L_{β} διατηρεί την αρχική του τιμή h_{in} . Έτσι μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις συσχετισμού, ακριβώς όπως στην προηγούμενη ενότητα, με συναρτησιακή παραγωγή της (8.55).

Παρότι ο χρόνος τρέχει σε μια μη συμβατική περιοχή, ο υπολογισμός θα γίνει ακριβώς με την ίδια μέθοδο που έγινε και στην προηγούμενη ενότητα. Θα δούλεψουμε και εδώ στον άρτιο τομέα του συστήματος. Η βασική υπολογιστική δυσκολία είναι ότι λόγω της χρονικής εξάρτησης του πεδίου οι ενέργειες $\epsilon_m^{(e)}$ και ο $U_m^{(e)}$ είναι επίσης χρονοεξαρτώμενοι. Έτσι θα εμφανιστεί στον κινητικό όρο της δράσης η έξτρα συνεισφορά

$$U_m^{(e)\dagger} i\partial_{t_P} U_m^{(e)} = -\dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x, \quad \dot{\theta}_m^{(e)} = -\hbar \frac{2r}{\epsilon_m^{(e)2}} \sin \left[\frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] = -\hbar \frac{2r}{\epsilon_m^{(e)2}} \sin \phi_m^{(e)} \quad (r \neq 0), \quad (8.56)$$

κάτι που περιπλέκει τον υπολογισμό. Ωστόσο η τετραγωνική μορφή της δράσης διασφαλίζει ότι ο υπολογισμός, παρότι δύσκολος, παραμένει εφικτός.

Η γεννήτρια συνάρτηση τότε, ακολουθώντας την πορεία της προηγούμενης ενότητας, γίνεται

$$Z^{(e)}[J] = \prod_{m=0}^{N/2-1} Z_m^{(e)}[J], \quad Z_m^{(e)}[J] = \int_{AP} \mathcal{D}\phi_m^* \mathcal{D}\phi_m e^{iS_m^{(e)}[J]}, \quad (8.57)$$

με

$$S_m^{(e)}[J] = \int_C dt_C \left[\phi_m^* \left(D_m^{(e)} - \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x \right) \phi_m - \mu_m^* \phi_m - \phi_m^* \mu_m \right]. \quad (8.58)$$

Εδώ $D_m^{(e)}$ είναι το ανάλογο του αντίστοιχου τελεστή της προηγούμενης ενότητας σε χρόνο Keldysh

$$D_m^{(e)} = \begin{pmatrix} i\partial_{t_C} - \epsilon_m^{(e)}(t_C) & 0 \\ 0 & i\partial_{t_C} + \epsilon_m^{(e)}(t_C) \end{pmatrix}. \quad (8.59)$$

Έτσι, αναμενόμενα, η γεννήτρια συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί:

$$Z_m^{(e)}[J] = Z_m^{(e)}[0] \exp \left[-i \int_C dt_C \int_C dt'_C \mu_m^*(t_C) \tilde{G}_m(t_C, t'_C) \mu_m(t'_C) \right], \quad (8.60)$$

όπου η \tilde{G}_m ορίζεται ως η αντιπεριοδική λύση της εξίσωσης Green

$$\left(D_m^{(e)} - \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x \right) \tilde{G}_m = \hat{I}. \quad (8.61)$$

Αφήνουμε τη λύση αυτής καθώς και τον υπολογισμό του $Z_m^{(e)}[0]$ για το τέλος της ενότητας. Εκεί θα δούμε ότι η \tilde{G}_m , μπορεί να εκφραστεί ως

$$\tilde{G}_m = G_m + \Delta_m, \quad (8.62)$$

όπου Δ_m είναι μια συγχλίνουσα σειρά ως προς $\dot{\theta}_m^{(e)}$, που μπορεί να υπολογιστεί συστηματικά. Το αποτέλεσμα της μέχρι πρώτη τάξη είναι

$$\Delta_m = G_m \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x G_m + \mathcal{O}(\dot{\theta}_m^{(e)2}), \quad (8.63)$$

όπου G_m είναι η αντιπεριδική συνάρτηση Green που ικανοποιεί τη $D_m^{(e)} G_m = \hat{I}$, η οποία θα υπολογιστεί και αυτή στο τέλος της ενότητας.

As μην ξεχνάμε εκείνο που κατά κύριο λόγο μας ενδιαφέρει: αυτό είναι το πώς κλιμακώνεται η εντροπία κοντά στην κρίσιμότητα. Αυτό θα το δούμε, ακριβώς όπως στη χρονοανεξάρτητη περίπτωση, μέσω κάποιας συνάρτησης συσχετισμού. Επιλέγουμε να εξετάσουμε την

$$\left\langle \hat{T} \left(\hat{\psi}_b^\dagger(t_2) \hat{\psi}_a(t_1) \right) \right\rangle_c = \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_b(t_{2+}) \delta \bar{J}_a(t_{1+})} \Big|_{J=0}, \quad (8.64)$$

η οποία θα λάβει τον παράγοντα $\frac{1}{2}$ για $t_2 = t_1$, $b = a$ όπως εξηγήθηκε νωρίτερα. Θεωρώντας τους δύο χρόνους ίδιους, η συνεισφορά του άρτιου τομέα μέχρι πρώτη τάξη ως προς $\dot{\theta}_m^{(e)}$, προκύπτει

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_b^\dagger(t) \hat{\psi}_a(t) \right\rangle_c^{(e)} &= -\frac{i}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} (m+\frac{1}{2})(b-a)} \times \\ &\times \text{tr} \left([(\hat{I} + G_m \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x) G_m](t, t) \left[\cos(2\theta_m^{(e)}(t)) \sigma^z - \sin(2\theta_m^{(e)}(t)) \sigma^y \right] \right) + \frac{1}{2} \delta_{ba} + \mathcal{O}(\dot{\theta}_m^{(e)2}). \end{aligned} \quad (8.65)$$

Για πεδίο $h = h(\omega t)$ και $\beta \rightarrow \infty$, στο αδιαβατικό όριο η συνεισφορά της $\Delta_m = G_m \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x G_m + \mathcal{O}(\dot{\theta}_m^{(e)2})$ στη συνάρτηση συσχετισμού είναι αμελητέα καθώς $\omega \rightarrow 0$. Τότε ο κυρίαρχος όρος στην (8.65) είναι αυτός που προέρχεται από τη G_m και άρα

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_b^\dagger(t) \hat{\psi}_a(t) \right\rangle_c^{(e)} &\stackrel{\omega \rightarrow 0}{\simeq} -\frac{i}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} (m+\frac{1}{2})(b-a)} \cos \left(2\theta_m^{(e)}(t) \right) \text{tr} [G_m(t, t) \sigma^z] + \frac{1}{2} \delta_{ba} \stackrel{\beta \rightarrow \infty}{=} \\ &\stackrel{\beta \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} (m+\frac{1}{2})(b-a)} \cos \left(2\theta_m^{(e)}(t) \right) + \frac{1}{2} \delta_{ba}, \end{aligned} \quad (8.66)$$

όπου εκμεταλλευτήκαμε την ιδιότητα $G^{(-)}(t_C, t'_C) = -G^{(+)}(t'_C, t_C)$.

Συγκρίνοντας με το αντίστοιχο αποτέλεσμα για χρονοανεξάρτητο πεδίο, συνάγουμε ότι στο αδιαβατικό όριο η μοναδική αλλαγή στη συνάρτηση συσχετισμού

είναι η αλλαγή $\theta_m^{(e)} \rightarrow \theta_m^{(e)}(t)$. Ωστόσο, όπως θα δούμε, αυτό ισχύει μόνο μακριά από το κρίσιμο σημείο. Αντίθετα, στην περιοχή γύρω απ' αυτό ($|h-1| \sim \mathcal{O}(\omega^{1/2})$), ανεξαρτήτως του πόσο αργή είναι η εξέλιξη, η συνεισφορά από τη Δ_m δε μπορεί να αγνοηθεί καθώς γίνεται εξίσου σημαντική με εκείνη από τη G_m . Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με το μηχανισμό Kibble-Zurek (KZM) [21], [22]: σύμφωνα με αυτόν, η εξέλιξη ενός συστήματος μέσω μιας μετάβασης φάσης δεύτερης τάξης δε μπορεί να είναι αδιαβατική κοντά στο κρίσιμο σημείο. Συγκεκριμένα, η εξέλιξη θεωρείται αρχικά αδιαβατική και κοντά στην κρισιμότητα γίνεται μη αδιαβατική. Εκεί ο ρυθμός μεταβολής του ενεργειακού χάσματος γίνεται της ίδιας τάξης μεγέθους με το ίδιο το χάσμα, $|\dot{h}|/|h-1| \sim \mathcal{O}(\omega^{1/2})$. Τότε, για την εντροπία διεμπλοκής αναμένουμε $S \simeq \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{\omega}$.

Πριν κλείσουμε, θα σκιαγραφήσουμε τη μαθηματική ανάλυση που μας οδήγησε στα παραπάνω συμπεράσματα.

Ξεκινάμε από την επίλυση της εξίσωσης Green (8.61) χωρίς τον όρο $\dot{\theta}_m^{(e)}$:

$$\begin{pmatrix} i\partial_{t_C} - \epsilon_m^{(e)}(t_C) & 0 \\ 0 & i\partial_{t_C} + \epsilon_m^{(e)}(t_C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_m^{(+)}(t_C, t'_C) & 0 \\ 0 & G_m^{(-)}(t_C, t'_C) \end{pmatrix} = \hat{I} \delta_C(t_C - t'_C). \quad (8.67)$$

Σύμφωνα με τις συμβάσεις μας η ενέργεια δεν αλλάζει μεταξύ των L_+ , L_- οπότε $\epsilon_m^{(e)}(t_+) = \epsilon_m^{(e)}(t_-)$, ενώ παραμένει σταθερή επί του L_β , $\epsilon_m^{(e)} = \epsilon_m^{(e)}(h_{in})$. Η $G_m^{(+)}$, που διαδίδει τους m τρόπους, ικανοποιεί αντιπεριοδικές συνοριακές συνθήκες και γίνεται

$$G_m^{(+)}(t_C, t'_C) = -i \left[\Theta_C(t_C - t'_C) - \left(1 + e^{\beta \epsilon_m^{(e)}(h_{in})}\right)^{-1} \right] e^{-i \int_{t'_C}^{t_C} dt'' \epsilon_m^{(e)}(t'')}. \quad (8.68)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση για τους $N - m - 1$ τρόπους -και αυτή ικανοποιεί αντιπεριοδικές συνοριακές συνθήκες- γίνεται

$$G_m^{(-)}(t_C, t'_C) = -i \left[\left(1 + e^{\beta \epsilon_m^{(e)}(h_{in})}\right)^{-1} - \Theta_C(t'_C - t_C) \right] e^{i \int_{t'_C}^{t_C} dt'' \epsilon_m^{(e)}(t'')}. \quad (8.69)$$

Από αυτές, εύκολα βλέπουμε τη σημαντική ιδιότητα $G_m^{(-)}(t_C, t'_C) = -G_m^{(+)}(t'_C, t_C)$.

Εξ άλλου, ο παράγοντας κανονικοποίησης της (8.60) μπορεί να εκφραστεί ως

$$Z_m^{(e)}[0] = \text{Det} \left(D_m^{(e)} - \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x \right) = \text{Det} \left(D_m^{(e)} \right) \text{Det} \left(\hat{I} - K_m \right), \quad (8.70)$$

με $K_m = G_m \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^{x1}$ και άρα

$$Z^{(e)}[0] = Z_0^{(e)}(\beta) \left(\prod_{m=0}^{N/2-1} \text{Det} \left(\hat{I} - K_m \right) \right), \quad (8.71)$$

¹με δείκτες αυτή γράφεται

$$(K_m(t_C - t'_C))^a_b = (G_m(t_C - t'_C))^a_c (\sigma^x)^c_b \dot{\theta}_m^{(e)}(t'_C)$$

με $Z_0^{(e)}(\beta) = Z_{in}^{(e)}(\beta) = \prod_{m=0}^{N/2-1} \text{Det} \left(D_m^{(e)} \right)$. Σε αυτή την εξίσωση εισάγαμε τη συνάρτηση Green G_m , που ικανοποιεί τη $D_m^{(e)} G_m = \hat{I}$, την οποία λύσαμε παραπάνω. Με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στη χρονοανεξάρτητη περίπτωση, εύκολα βρίσκουμε

$$Z_0^{(e)}(\beta) = \frac{1}{2} \left\{ \prod_{m=0}^{N-1} 2 \cosh \left(\beta \epsilon_m^{(e)}(h_{in})/2 \right) + \prod_{m=0}^{N-1} 2 \sinh \left(\beta \epsilon_m^{(e)}(h_{in})/2 \right) \right\}. \quad (8.72)$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου όρου γράφουμε

$$\text{Det} \left(\hat{I} - K_m \right) = \text{Det} \left(\hat{I} - \lambda K_m \right) \Big|_{\lambda=1}, \quad (8.73)$$

ώστε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η $\text{Det} \left(\hat{I} - \lambda K_m \right)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ως προς λ

$$\text{Det} \left(\hat{I} - \lambda K_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n^{(m)} \lambda^n, \quad (8.74)$$

όπου

$$a_n^{(m)} = (-1)^n \text{Det} \begin{pmatrix} \text{Tr} K_m & n-1 & & & \\ \text{Tr} K_m^2 & \text{Tr} K_m & n-2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \text{Tr} K_m^n & \text{Tr} K_m^{n-1} & \cdot & \cdot & \text{Tr} K_m \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (8.75)$$

και $a_0 = 1$. Εδώ το σύμβολο του ίχνους υπονοεί ίχνος ως προς τους δείκτες του πίνακα αλλά και ως προς τους χρονικούς δείκτες:

$$\text{Tr}(\dots) = \text{tr} \int_C dt_C \langle t_C | (\dots) | t_C \rangle = \int_C dt_C \sum_{aa} \langle t_C | (\dots)_{aa} | t_C \rangle \quad (8.76)$$

Αυτή η σειρά συγκλίνει $\forall \lambda$ αν $\|K_m\|^2 < \infty$, κάτι που ισχύει για την περιοχή μας αν $\beta < \infty$ και $T < \infty$. Σε κάθε περίπτωση όμως, μπορούμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα στην περιοχή σύγκλισης και να κάνουμε αναλυτική συνέχιση του αποτελέσματος έξω από αυτή. Άρα κάθε τάξη μπορεί να βρεθεί αναλυτικά από αυτό το ανάπτυγμα σε σειρά ως προς θ_m . Εύκολα μπορούμε να δούμε πως $\text{Tr} K_m^{2\nu-1} = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$. Έτσι, στους συντελεστές (8.75) συνεισφέρουν μόνο οι άρτιες δυνάμεις του K_m . Για $\lambda = 1$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \text{Det} \left(\hat{I} - K_m \right) &= \exp \left\{ \ln \text{Det} \left(\hat{I} - K_m \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \ln \left[1 - \frac{1}{2} \text{Tr} K_m^2 - \frac{1}{4} \left(\text{Tr} K_m^4 - \frac{1}{2} (\text{Tr} K_m^2)^2 \right) + \dots \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} K_m^2 - \frac{1}{4} \text{Tr} K_m^4 - \dots \right\}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Έτσι ο παράγοντας κανονικοποίησης της (8.70) γίνεται

$$Z^{(e)}[0] = Z_0^{(e)}(\beta) e^{-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} E_m}, \quad (8.78)$$

όπου

$$E_m = \frac{1}{2} \text{Tr} K_m^2 + \frac{1}{4} \text{Tr} K_m^4 + \dots \quad (8.79)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης Green

$$\tilde{D}_m \tilde{G}_m = \left(D_m^{(e)} - \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x \right) \tilde{G}_m = \hat{I}, \quad (8.80)$$

γράφουμε

$$\tilde{G}_m = \frac{\hat{I}}{\hat{I} - K_m} G_m, \quad K_m = G_m \dot{\theta}_m^{(e)} \sigma^x, \quad (8.81)$$

Μέσω της λεγόμενης τεχνικής Helmholtz [35], η \tilde{G}_m γίνεται

$$\tilde{G}_m = \frac{1}{\text{Det}(1 - K_m)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} b_k^{(m)} \right) G_m, \quad (8.82)$$

όπου οι συντελεστές $b_k^{(m)}$ προκύπτουν αντικαθιστώντας $\text{Tr} K_m^n \rightarrow \text{Tr} K_m^n - K_m^n$ στους $a_k^{(m)}$ της (8.75).

Τώρα, ορίζουμε ως $A_n^{(m)}$ τον όρο που περιέχει όλους τους όρους της μορφής $K_m^k \text{Tr} K_m^l$ για $k + l = n$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\tilde{G}_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(m)} G_m = G_m + \Delta_m. \quad (8.83)$$

Θεωρώντας μαγνητικό πεδίο $h = h(\omega t)$ (δηλαδή για τις ενέργειες $\epsilon = \epsilon(\omega t)$), μπορούμε εύκολα να εκτιμήσουμε τη συνεισφορά του $\Delta_m = K_m G_m + \mathcal{O}(\dot{\theta}_m^{(e)2})$, μέσω της αναβαθμονόμησης $\omega t_C \rightarrow t_C$. Η $\dot{\theta}_m^{(e)}$ στα αναπτύγματα (8.77), (8.83), εμφανίζεται πάντα μέσα σε μια χρονική ολοκλήρωση, οπότε ο συνδυασμός $\int_C dt_C \dot{\theta}_m^{(e)}(t_C)$ παραμένει αναλλοίωτος στο όριο $T \rightarrow \infty$. Άρα, η συχνότητα ω εμφανίζεται μόνο στους εκθέτες των συναρτήσεων Green ως ²

$$\exp \left(i \int_{t'_C}^{t_C} dt''_C \epsilon(t''_C) \right) \rightarrow \exp \left(i \int_{t'_C}^{t_C} dt''_C \epsilon(t''_C) / \omega \right). \quad (8.84)$$

Για $\beta \rightarrow \infty$ και για το θερμοδυναμικό όριο, με επανειλημμένη χρήση της ταυτότητας

$$\exp \left(i \int_{t'_C}^{t_C} dt''_C \epsilon(t''_C) / \omega \right) = -i \frac{\omega}{\epsilon(t_C)} \partial_{t_C} \exp \left(i \int_{t'_C}^{t_C} dt''_C \epsilon(t''_C) / \omega \right) \quad (8.85)$$

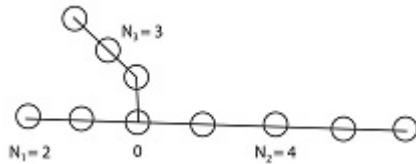
²Τα όρια ολοκλήρωσης θα αναβαθμονομηθούν φυσικά και αυτά, όμως η t'' όχι, διότι είναι εσωτερική μεταβλητή ολοκλήρωσης.

μπορούμε να κάνουμε τις ολοκληρώσεις κατά μέρη που εμφανίζονται σε όλους τους όρους μέσα στο Δ_m . Υποθέτουμε ότι οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται αρκούτως γρήγορα για $T \rightarrow \infty$, λαμβάνουμε το πολυπόθητο ανάπτυγμα σε δυνάμεις του ω , το οποίο δικαιολογεί το συμπέρασμα ότι η συνεισφορά του Δ_m στην (8.65) είναι αμελητέα στο αδιαβατικό όριο. Αυτό όμως δεν ισχύει όταν $\int_{t'_C}^{t_C} dt'' \epsilon(t''_C) \simeq \omega \rightarrow 0$, κάτι που μπορεί να συμβεί μόνο όταν το δυναμικό σύστημα πλησιάζει το κρίσιμο σημείο σε μια περιοχή εύρους $\delta t \sim \omega^{1/2}$ γύρω από αυτό, όπου $\epsilon \sim |h - 1| \sim \omega^{1/2}$. Τότε ο εκθετικός παράγοντας στην (8.84) είναι σχεδόν σταθερός, οι όροι ανώτερης τάξης γίνονται συγκρίσιμοι με τον όρο μηδενικής και το σύστημα δεν εξελίσσεται πια αδιαβατικά, σε συμφωνία με το μηχανισμό Kibble-Zurek.

Κεφάλαιο 9

ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΜΗ ΤΟΠΙΚΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα φερμιόνια Majorana εμφανίστηκαν πρώτη φορά σαν ένα μαθηματικό τριχ ώστε να αποδώσει η εξίσωση Dirac πραγματικές λύσεις, χωρίς ωστόσο να έχει διευκρινιστεί η φυσική σημασία αυτών των λύσεων. Αργότερα, βρέθηκαν συστήματα τα οποία, εντελώς ανέλπιστα, ήταν σε θέση να φιλοξενήσουν ακριβώς τέτοια φερμιόνια. Ένα αρχετυπικό παράδειγμα τέτοιου συστήματος, και εξαιρετικά απλό στη μελέτη του, είναι η αλυσίδα Kitaev [62]. Επί της ουσίας πρόκειται για ένα μονοδιάστατο p-υπεραγωγό. Ο Kitaev μελετώντας αυτό το μοντέλο έδειξε ότι με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων της αλυσίδας -της παραμέτρου άλματος που εκφράζει την κινητικότητα των φερμιονίων και του υπεραγωγίου χάσματος που σε αδρές γραμμές είναι το ενεργειακό κέρδος του συστήματος από το σχηματισμό ενός ζεύγους Cooper- εμφανίζονται μηδενικοί τρόποι Majorana, ένας σε κάθε άκρο της αλυσίδας. Αυτοί οι δύο τρόποι δεν είναι σε σύζευξη με κανένα άλλο φερμιόνιο του συστήματος και δεν εμφανίζονται στη Hamiltonian. Όμως όπως είπαμε δυο φερμιόνια Majorana στήνουν ένα συμβατικό φερμιόνιο. Έτσι εδώ, με χρήση των δύο μηδενικών τρόπων των άκρων της αλυσίδας, μπορεί να προκύψει ένα νέο, συμβατικό φερμιόνιο. Το κέρδος είναι ότι αυτό το φερμιόνιο είναι ακραία μη τοπικό -εδράζεται και στα δύο άκρα της αλυσίδας- το οποίο σημαίνει ότι τοπικές παρεμβολές δε μπορούν να καταστρέψουν την πληροφορία που φέρει. Αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο από της σκοπιά της κβαντικής πληροφορίας: πράγματι, από εδώ μπορεί να ξεκινήσει η μελέτη του τοπολογικού υπολογισμού [60]. Σ' αυτό το είδος υπολογισμού, η πληροφορία είναι αποθηκευμένη μη τοπικά, με αποτέλεσμα να είναι πολύ καλύτερα θωρακισμένη απέναντι σε κάθε είδους τοπικές παρεμβολές, σε σχέση με άλλα κβαντικά συστήματα που έχουν προταθεί για πραγματοποίηση κβαντικού υπολογισμού. Για παράδειγμα η αποθήκευση της πληροφορίας σε τοπικούς βαθμούς ελευθερίας spin ηλεκτρονίων, μοιάζει συχνά καταδικασμένη να αποτύχει, καθώς το spin είναι εξαιρετικά



Σχήμα 9.1: Ένα παράδειγμα τρίκλαδης αλυσίδας για το οποίο ισχύει $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, $N_3 = 3$.

επιρρεπές σε περιβαλλοντικές παρεμβολές, σχεδόν κάθε είδους.

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζεται μια πολύ φυσιολογική παραλλαγή της αλυσίδας Kitaev: θα μελετήσουμε ακριβώς αυτή την αλυσίδα στην περίπτωση που παρουσιάζει κάποια διακλάδωση σε κάποιο σημείο στο εσωτερικό της. Αυτό που θα έχουμε εδώ είναι στην ουσία μια τρίκλαδη αλυσίδα Kitaev, ή ισοδύναμα τρεις αλυσίδες Kitaev που έχουν κοινό το ένα από τα άκρα τους. Η Hamiltonian που θα μελετήσουμε περιέχει όρους που περιγράφουν ακριβώς τα ίδια φαινόμενα που συναντώνται και στη συνήθη αλυσίδα: άλματα και υπεραγωγήμη σύζευξη μεταξύ πλησιέστερων γειτόνων.

9.1 Η τρίκλαδη αλυσίδα

Χρησιμοποιούμε τους δείκτες $a = 1, 2, 3$ για να ονομάσουμε τους τρεις κλάδους της κατασκευής και τους δείκτες $k = 1, 2, \dots$ (η τιμή του δείκτη k αυξάνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο στο οποίο οι τρεις κλάδοι συναντιούνται) για να ονομάσουμε τα πλεγματικά σημεία. Με αυτό τον τρόπο κάθε πλεγματικό σημείο έχει ως ετικέτες δύο δείκτες, όπου ο πρώτος δηλώνει τον κλάδο και ο δεύτερος το πλεγματικό σημείο του κλάδου. Το σημείο όπου οι τρεις κλάδοι συναντιούνται δε χρειάζεται δύο δείκτες αφού δεν ανήκει σε κανέναν από τους τρεις κλάδους (ή ανήκει σε όλους) και για αυτό χρησιμοποιείται ο δείκτης 0. N_1, N_2, N_3 είναι ο αριθμός των πλεγματικών σημείων κάθε κλάδου (βλ. Σχήμα 8.1), t είναι η παράμετρος άλματος και Δ το υπεραγωγίμο χάσμα (υποθέτουμε $\Delta = \Delta^*$, όπως στο μοντέλο Kitaev). Επιπλέον, σε αυτή την ενότητα θα σημειώνουμε τους τελεστές χωρίς το σύμβολό τους, μιας και δε θα εμπλακούμε με κλασικά σύμβολα ή κάτι παρόμοιο, οπότε η διάκριση είναι περιττή.

Η Hamiltonian είναι (οι a είναι συνήθεις φερμιονικοί τελεστές που ικανοποιούν την $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$, $\{a_i, a_j\} = 0$: το χημικό δυναμικό το θεωρούμε μηδενικό):

$$\begin{aligned}
H = & -t \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}-1} (a_{\alpha,k}^{\dagger} a_{\alpha,k+1} + a_{\alpha,k+1}^{\dagger} a_{\alpha,k}) + \\
& \Delta \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}-1} (-1)^{\alpha+1} (a_{\alpha,k} a_{\alpha,k+1} + a_{\alpha,k+1}^{\dagger} a_{\alpha,k}^{\dagger}) - \\
& t(a_0^{\dagger} a_{1,1} + a_{1,1}^{\dagger} a_0 + a_0^{\dagger} a_{2,1} + a_{2,1}^{\dagger} a_0 + a_0^{\dagger} a_{3,1} + a_{3,1}^{\dagger} a_0) + \\
& \Delta(a_0 a_{1,1} + a_{1,1}^{\dagger} a_0^{\dagger} + a_{2,1} a_0 + a_0^{\dagger} a_{2,1}^{\dagger} + a_0 a_{3,1} + a_{3,1}^{\dagger} a_0^{\dagger}). \quad (9.1)
\end{aligned}$$

Ο παράγοντας $(-1)^{\alpha+1}$ χρήζει σχολιασμού. Για να μη διακόψουμε την ανάλυση ε-δών, θα το σχολιάσουμε στο τέλος της ενότητας. Τώρα επιλέγουμε τις παραμέτρους ώστε $t = \Delta$, και η Hamiltonian γίνεται:

$$\begin{aligned}
H = & -t \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}-1} (a_{\alpha,k}^{\dagger} + (-1)^{\alpha} a_{\alpha,k}) (a_{\alpha,k+1} - (-1)^{\alpha} a_{\alpha,k+1}^{\dagger}) - \\
& t[(a_0^{\dagger} - a_0)(a_{1,1}^{\dagger} + a_{1,1}) + (a_{2,1}^{\dagger} - a_{2,1})(a_0^{\dagger} + a_0) + (a_0^{\dagger} - a_0)(a_{3,1}^{\dagger} + a_{3,1})]. \quad (9.2)
\end{aligned}$$

Για να τη γράψουμε σε συμπαγή μορφή, ορίζουμε τους τελεστές Majorana (ικανοποιούν την άλγεβρα $\{\gamma_r, \gamma_s\} = 2\delta_{rs}$ -εδώ οι δείκτες r, s μπορεί να περιέχουν έναν (0) ή δύο (α, k) υποδείκτες και για την περίπτωση των δύο $\delta_{rs} = \delta_{a_r a_s} \delta_{k_r k_s}$, ενώ $\delta_{rs} = 0$ αν οι r, s έχουν διαφορετικό αριθμό υποδεικτών- και $\gamma_r^2 = 1, \gamma_r^{\dagger} = \gamma_r$):

$$a_{\alpha,k}^{\dagger} + (-1)^{\alpha} a_{\alpha,k} = -i\gamma_{\alpha,2k}, \quad (9.3)$$

$$a_{\alpha,k} - (-1)^{\alpha} a_{\alpha,k}^{\dagger} = \gamma_{\alpha,2k-1}, \quad (9.4)$$

για $\alpha = 1, 3$ αλλά

$$a_{\alpha,k}^{\dagger} + (-1)^{\alpha} a_{\alpha,k} = \gamma_{\alpha,2k}, \quad (9.5)$$

$$a_{\alpha,k} - (-1)^{\alpha} a_{\alpha,k}^{\dagger} = -i\gamma_{\alpha,2k-1}, \quad (9.6)$$

για $\alpha = 2$ και για τον τόπο 0:

$$a_0^{\dagger} + a_0 = \gamma_0, \quad (9.7)$$

$$a_0^{\dagger} - a_0 = -i\mu_0. \quad (9.8)$$

Τότε η Hamiltonian γίνεται:

$$H = it \left[\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}-1} \gamma_{\alpha,2k} \gamma_{\alpha,2k+1} + \gamma_0 \gamma_{2,1} + \mu_0 \gamma_{1,1} + \mu_0 \gamma_{3,1} \right]. \quad (9.9)$$

Αυτή η μορφή μοιάζει με τη μορφή της Hamiltonian στο μοντέλο Kitaev αφού εισάγουμε τους τελεστές Majorana. Στην αλυσίδα Kitaev, κάθε τελεστής Majorana εμφανίζεται σε έναν -το πολύ- όρο στην τετραγωνική Hamiltonian, κάτι που επιτρέπει να ορίσουμε νέα συμβατικά φερμιόνια και έπειτα να βρούμε τη θεμελιώδη ύπο όρους αυτών, αφού για αυτά είναι εύκολο να βρεθεί ο χώρος Fock. Εδώ αυτό μπορεί σχεδόν να γίνει: όντως όλα τα φερμιόνια Majorana εκτός του μ_0 εμφανίζονται το πολύ σε έναν όρο.

Ονομάζουμε:

$$it\left[\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}-1} \gamma_{\alpha,2k} \gamma_{\alpha,2k+1} + \gamma_0 \gamma_{2,1}\right] = H_{triv}, \quad (9.10)$$

$$it[\mu_0 \gamma_{1,1} + \mu_0 \gamma_{3,1}] = H_{comp}, \quad (9.11)$$

για να χωρίσουμε το τμήμα της Hamiltonian το οποίο μπορούμε εύκολα να διαχειριστούμε από εκείνο που είναι πιο περίπλοκο. Ο μεταθέτης των δύο υπο-Hamiltonians είναι μηδέν, οπότε μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα και η θεμελιώδης δεν είναι παρά το ταυυστικό γινόμενο των θεμελιωδών τους.

Αυτό όμως που κυρίως μας αφορά εδώ είναι ότι τρία ακριβώς Majorana φερμιόνια δεν εμφανίζονται στη Hamiltonian. Όντως, όλα τους συμμετέχουν σε κάποιον όρο, εκτός των $\gamma_{\alpha,2N_{\alpha}}$, $\alpha = 1, 2, 3$. Είναι προφανές από τον τρόπο που κάναμε την αρίθμηση ότι αυτοί οι τρόποι εδράζονται στα άκρα των κλάδων 1, 2, 3 αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει αυτούς τους τρόπους για να χτίσει νέους βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι μετατίθενται με τη Hamiltonian, καθιστώντας τη θεμελιώδη εκφυλισμένη.

Τώρα, προχωρούμε στην εύρεση της θεμελιώδους. Ορίζουμε τους συμβατικούς φερμιονικούς τελεστές

$$\Gamma_{\alpha,k} = \frac{\gamma_{\alpha,2k} + i\gamma_{\alpha,2k+1}}{2}, \quad (9.12)$$

για $\alpha = 1, 2, 3$ και $k = 1, \dots, N_{\alpha} - 1$, και το

$$\Gamma_0 = \frac{\gamma_0 + i\gamma_{2,1}}{2}. \quad (9.13)$$

Έτσι:

$$H_{triv} = t\left[\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}-1} (2\Gamma_{\alpha,k}^{\dagger} \Gamma_{\alpha,k} - 1) + 2\Gamma_0^{\dagger} \Gamma_0 - 1\right]. \quad (9.14)$$

Όλοι οι όροι αυτής της Hamiltonian μετατίθενται μεταξύ τους. Προφανώς, καθένas από αυτούς τους όρους μετράει τον αριθμό κατάληψης κάποιου φερμιονίου Γ (και υπάρχουν και κάποιες σταθερές). Έτσι η θεμελιώδης αυτής της Hamiltonian είναι εκείνη χωρίς καθόλου Γ φερμιόνια (αυτή που ικανοποιεί την $\prod_{\alpha=1}^3 \prod_{k=1}^{N_{\alpha}-1} \Gamma_{\alpha,k} \Gamma_0 |0\rangle = 0$).

Τώρα προχωρούμε στη μελέτη της H_{comp} . Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε τους τελεστές

$$\gamma_{\pm} = \frac{\gamma_{1,1} \pm \gamma_{3,1}}{\sqrt{2}}. \quad (9.15)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αυτοί οι τελεστές είναι Majorana. Επομένως, ορίζοντας και το συμβατικό φερμιόνιο

$$\Gamma_{00} = \frac{\mu_0 + i\gamma_+}{2}, \quad (9.16)$$

μπορούμε, με την ίδια λογική με πριν, να βρούμε τη θεμελιώδη που αντιστοιχεί στην H_{comp} . Ωστόσο, πλέον είναι προφανές ότι απουσιάζει από τη συνολική Hamiltonian και ένα τέταρτο φερμιόνιο Majorana, το γ_- , το οποίο εδράζεται κοντά στο σημείο διακλάδωσης.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να εκφράσουμε τη συνολική θεμελιώδη συναρτήση του αριθμού κατάληψης των τρόπων που ορίστηκαν παραπάνω. Η θεμελιώδης είναι το τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων με αριθμό κατάληψης μηδέν για όλα τα Γ φερμιόνια ($\Gamma_{\alpha,k}^\dagger \Gamma_{\alpha,k} |0_{\Gamma_{\alpha,k}}\rangle = 0$ για $\alpha = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \Gamma_0^\dagger \Gamma_0 |0_{\Gamma_0}\rangle = 0, \Gamma_{00}^\dagger \Gamma_{00} |0_{\Gamma_{00}}\rangle = 0$). Έτσι

$$|GS\rangle = \prod_{\alpha=1}^3 \prod_{k=1}^{N_\alpha-1} \otimes |0_{\Gamma_{\alpha,k}}\rangle |0_{\Gamma_0}\rangle |0_{\Gamma_{00}}\rangle. \quad (9.17)$$

Η ενέργεια της θεμελιώδους είναι $-t(N_1 + N_2 + N_3 - 2) - \sqrt{2}t$ και μπορεί να γίνει 0 με μια κατάλληλη ενεργειακή προώθηση.

Σε επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε τον εκφυλισμό της θεμελιώδους. Πριν το κάνουμε όμως αυτό, θα προβούμε σε κάποιες επισημάνσεις για τη μορφή της Hamiltonian που μελετήσαμε.

Θεωρούμε πάλι τη Hamiltonian (9.1). Αυτό που ουσιαστικά έπρεπε να κάνουμε, ήταν να τη γράψουμε συναρτήση φερμιονίων Majorana, και μετά να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα φερμιόνια για να ορίσουμε νέους, κατάλληλους φερμιονικούς τελεστές. Τώρα, ας θεωρήσουμε μια πιο γενική Hamiltonian (όσον αφορά τις παραμέτρους) που επιτρέπει αυτή τη διαδικασία:

$$\begin{aligned} H = & - \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_\alpha-1} t_\alpha (a_{\alpha,k}^\dagger a_{\alpha,k+1} + a_{\alpha,k+1}^\dagger a_{\alpha,k}) + \\ & \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_\alpha-1} \Delta_\alpha (a_{\alpha,k} a_{\alpha,k+1} + a_{\alpha,k+1}^\dagger a_{\alpha,k}^\dagger) - \\ & t_{01} (a_0^\dagger a_{1,1} + a_{1,1}^\dagger a_0) - t_{02} (a_0^\dagger a_{2,1} + a_{2,1}^\dagger a_0) - t_{03} (a_0^\dagger a_{3,1} + a_{3,1}^\dagger a_0) + \\ & \Delta_{01} (a_0 a_{1,1} + a_{1,1}^\dagger a_0^\dagger) + \Delta_{02} (a_{2,1} a_0 + a_0^\dagger a_{2,1}^\dagger) + \Delta_{03} (a_0 a_{3,1} + a_{3,1}^\dagger a_0^\dagger). \quad (9.18) \end{aligned}$$

Ξεκάθαρα μπορούμε να πάρουμε μια Hamiltonian σαν τη (9.2) που μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε φερμιόνια Majorana και να συνεχίσουμε τη διαδικασία

θέτοντας $t_\alpha = \Delta_\alpha$, $t_{0\alpha} = \Delta_{0\alpha}$, για κάθε α . Με άλλα λόγια, δεν έχει διαφορά το να θεωρήσουμε διαφορετικές παραμέτρους για τις τρεις αλυσίδες, και ακόμη και διαφορετική παράμετρο για το σημείο-κόμβο. Ωστόσο, προτιμήσαμε να δουλέψουμε με τη Hamiltonian (9.1) αντί της πιο γενικής (9.18), διότι η (9.18) μοιάζει κάπως αφύσικη: προσέξτε για παράδειγμα ότι για το σημείο $\alpha 1$ θεωρούμε διαφορετικές παραμέτρους άλματος για τους δύο πλησιέστερους γείτονές του, κάτι όχι πολύ φυσιολογικό. Από την άλλη, η Hamiltonian (9.1) είναι αρκετά φυσική, γιατί το σύστημα θα μπορούσε να είναι ένα υπεραγωγίμο καλώδιο με μια διακλάδωση, κάτι πολύ φυσικότερο από το ασαφές σύστημα που περιγράφει η (9.18).

Τώρα, ως ξεκαθαρίσουμε τον παράγοντα $(-1)^{\alpha+1}$. Μπορούμε να τον σκεφτούμε σαν έναν τρόπο να ανακτήσουμε την αλυσίδα Kitaen αποκόβοντας έναν εκ των κλάδων 1, 3. Για να αποσαφηνιστεί η σημασία του, θεωρούμε πάλι τη Hamiltonian (9.1), όμως χωρίς αυτό τον παράγοντα:

$$\begin{aligned}
 H = & -t \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_\alpha-1} (a_{\alpha,k}^\dagger a_{\alpha,k+1} + a_{\alpha,k+1}^\dagger a_{\alpha,k}) + \\
 & \Delta \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_\alpha-1} (a_{\alpha,k} a_{\alpha,k+1} + a_{\alpha,k+1}^\dagger a_{\alpha,k}^\dagger) - \\
 & t(a_0^\dagger a_{1,1} + a_{1,1}^\dagger a_0 + a_0^\dagger a_{2,1} + a_{2,1}^\dagger a_0 + a_0^\dagger a_{3,1} + a_{3,1}^\dagger a_0) + \\
 & \Delta(a_0 a_{1,1} + a_{1,1}^\dagger a_0^\dagger + a_0 a_{2,1} + a_{2,1}^\dagger a_0^\dagger + a_0 a_{3,1} + a_{3,1}^\dagger a_0^\dagger). \quad (9.19)
 \end{aligned}$$

Σημειώστε πως ο όρος $a_{2,1} a_0 + a_0^\dagger a_{2,1}^\dagger$ στην (9.1) γίνεται $a_0 a_{2,1} + a_{2,1}^\dagger a_0^\dagger$ στην (9.19), γιατί στην (9.1) είναι γραμμένος ως $(-1)^{\alpha+1} (a_0 a_{2,1} + a_{2,1}^\dagger a_0^\dagger)$ για $\alpha = 2$, οπότε αμελώντας τον παράγοντα μπροστά του παίρνουμε τον τελικό όρο στην (9.19). Όντως, τώρα έχουμε τέλεια συμμετρία ανταλλαγής οποιονδήποτε δύο εκ των τριών κλάδων. Για $t = \Delta$ και παραγοντοποιώντας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 H = & -t \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_\alpha-1} (a_{\alpha,k}^\dagger - a_{\alpha,k})(a_{\alpha,k+1} + a_{\alpha,k+1}^\dagger) - \\
 & t[(a_0^\dagger - a_0)(a_{1,1}^\dagger + a_{1,1}) + (a_0^\dagger - a_0)(a_{2,1}^\dagger + a_{2,1}) + (a_0^\dagger - a_0)(a_{3,1}^\dagger + a_{3,1})]. \quad (9.20)
 \end{aligned}$$

Τώρα, είναι εμφανές ότι οι ορισμοί των φερμιονίων Majorana θα αποδώσουν μια Hamiltonian όπου ακριβώς ένα Majorana σε κάθε άκρο δε θα εμφανίζεται σε αυτήν, αλλά πέραν αυτών, θα λείπει και ο τρόπος $a_0^\dagger + a_0$. Έτσι, προκύπτουν και πάλι 4 ασύζευκτα Majorana, απλώς τώρα το ένα εδράζεται τοπικά στον πλεγματοειδή χώρο συνάντησης των τριών αλυσίδων.

Πάντως, χωρίς αυτό τον παράγοντα είναι αναμενόμενο να εμφανίζονται τέσσερις μηδενικοί τρόποι. Αυτό μπορεί να γίνει εμφανές αν σκεφτούμε τη γεωμετρία των αλυσίδων: Χωρίς τον παράγοντα $(-1)^{\alpha+1}$, είναι σαν να έχουμε τρεις αλυσίδες Kitaen συνδεδεμένες στο ένα άκρο (το σημείο-κόμβος συμπίπτει με τον τόπο όπου

βρίσκεται ένα εκ των ασύζευκτων Majorana φερμιονίων κάθε αλυσίδας). Διαισθητικά αναμένουμε από αυτό τον τρόπο να επιβιώσει, αφού όλα τα υπόλοιπα στη Hamiltonian μπορούν ακόμα να γραφούν συναρτήσει των νέων συμβατικών φερμιονίων που θα ορίσουμε, σε κανένα εκ των οποίων δε συμμετέχει. Το ίδιο συμβαίνει και για τους ασύζευκτους τρόπους στο άλλο άκρο κάθε αλυσίδας και υπάρχουν φυσικά τρεις τέτοιοι, οπότε συνολικά τέσσερις.

Ελέγχοντας τη γεωμετρία που χρησιμοποιήσαμε εμείς στην εξίσωση (9.1), είναι σαφές ότι συνδέσαμε μια αλυσίδα Kitaev σε ένα σημείο στο εσωτερικό μιας άλλης. Διαισθητικά περιμένουμε τον ασύζευκτο τρόπο στο άκρο της πρώτης αλυσίδας να αλληλεπιδράσει με τους τρόπους Majorana της δεύτερης (φυσικά μόνο με εκείνους που αφορούν το σημείο σύνδεσης), με μη τετριμμένο τρόπο, ακριβώς όπως περιγράφεται από την H_{comp} . Ωστόσο, είδαμε ότι ακόμη και σε αυτή την περίπτωση επιβιώνει κοντά στο σημείο σύνδεσης ένα φερμιόνιο Majorana, το οποίο παραμένει ασύζευκτο με όλα τα υπόλοιπα.

9.2 Χημικό δυναμικό και τοπικοποίηση

Θεωρούμε τη Hamiltonian (9.1) με τη σύμβαση $t = \Delta$ και προσθέτουμε και τον όρο που θα υπήρχε για μη μηδενικό χημικό δυναμικό:

$$H_{chem} = -\mu \left[\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}} (a_{\alpha,k}^{\dagger} a_{\alpha,k} - \frac{1}{2}) + a_0^{\dagger} a_0 - \frac{1}{2} \right]. \quad (9.21)$$

Με τις αλλαγές (9.3)–(9.8) μπορούμε εύκολα να πιστοποιήσουμε ότι

$$H_{chem} = \frac{i\mu}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^{N_{\alpha}} (-1)^{\alpha} \gamma_{\alpha,2k} \gamma_{\alpha,2k-1} + \mu_0 \gamma_0 \right]. \quad (9.22)$$

Η συνολική Hamiltonian στη βάση $(\gamma_0, \mu_0, \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2} \dots \gamma_{1,2N_1}, \gamma_{2,1} \dots \gamma_{2,2N_2}, \gamma_{3,1} \dots \gamma_{3,2N_3})^T$ είναι:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 & \dots & \dots & u \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w & 0 & u & \dots & \dots & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -u & 0 & w & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -w & 0 & u & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -u & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & w \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -w & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

110 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΜΗ ΤΟΠΙΚΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Αυτός ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός, $A_{ij} = -A_{ji}$, και έχει τα ακόλουθα μη μηδενικά στοιχεία (φυσικά αν το A_{ij} είναι μη μηδενικό το ίδιο ισχύει και για το A_{ji} αλλά καταγράφουμε για συντομία μόνο έναν εξ αυτών):

Στα σημεία που βρίσκονται μία θέση δεξιά και μία θέση αριστερά της διαγωνίου, όπου είναι:

$$A_{12} = -w, \quad (9.24)$$

$$A_{23} = u, \quad (9.25)$$

$$A_{2i+1,2i+2} = w, \quad i = 1, \dots, N_1, \quad (9.26)$$

$$A_{2i+2,2i+3} = u \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad (9.27)$$

$$A_{2i+1,2i+2} = -w, \quad i = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2, \quad (9.28)$$

$$A_{2i+2,2i+3} = u, \quad i = N_1, \dots, N_1 + N_2 - 1, \quad (9.29)$$

$$A_{2i+1,2i+2} = w, \quad i = N_1 + N_2 + 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3, \quad (9.30)$$

$$A_{2i+2,2i+3} = u, \quad i = N_1 + N_2, \dots, N_1 + N_2 + N_3 - 1 \quad (9.31)$$

και επίσης στις θέσεις

$$A_{1,2N_1+3} = u, \quad (9.32)$$

$$A_{2,2N_1+2N_2+3} = u. \quad (9.33)$$

Παραπάνω έχουμε θέσει

$$u = \frac{t}{2}, \quad (9.34)$$

$$w = \frac{\mu}{4}. \quad (9.35)$$

Ψάχνουμε μηδενικούς τρόπους αυτής της Hamiltonian, δηλαδή καταστάσεις με ενέργεια μηδέν, οπότε πρέπει να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη $(H + H_{chem})U = 0$, U κάποια κατάσταση.

Θα ήταν εύκολο να βρούμε τέτοιες καταστάσεις U κατασκευαστικά, αν δεν υπήρχαν τα στοιχεία $A_{1,2N_1+3} = u$, $A_{2,2N_1+2N_2+3} = u$ και τα αντισυμμετρικά τους. Θα δούμε όμως ότι αυτά δε θα μας καταστρέψουν την κατασκευή. Ασχολούμαστε με το μέρος του πίνακα της Hamiltonian που αφορά τις γραμμές και τις στήλες από 3 ως $2N_1 + 2$. Αυτά δημιουργούν έναν πίνακα με σχετικά απλή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 0 & w & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -w & 0 & u & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -u & 0 & w & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & w \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -w & 0 \end{pmatrix} = H_1. \quad (9.36)$$

Απαιτώντας $H_1 U = 0$, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη λύση

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{w}{u})^{N_1-1} \\ 0 \\ \cdots \\ (\frac{w}{u})^2 \\ 0 \\ \frac{w}{u} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.37)$$

Στην πραγματικότητα υπάρχει πρόβλημα μόνο με το πρώτο στοιχείο αυτής της κατάστασης: όντως για την πρώτη γραμμή της $H_1 U$ για το συγκεκριμένο U , προκύπτει $w(\frac{w}{u})^{N_1-1}$ το οποίο είναι διάφορο του μηδενός. Αλλά αν υποθεθεί ότι $w < u$ (αυτό αντιστοιχεί στο παραμετρικό εύρος όπου η αλυσίδα Kitaev είναι τοπολογική, που στην πραγματικότητα είναι και το μόνο εύρος όπου αναμένουμε να βρούμε ασύζευκτους μηδενικούς τρόπους Majorana) και ότι ο αριθμός N_1 είναι αρκετά μεγάλος (η αλυσίδα είναι αρκετά μεγάλη), ο όρος αυτός είναι αμελητέος. Το σφάλμα από την αμέλεια αυτού του όρου φθίνει εκθετικά με το μήκος της αλυσίδας, οπότε για πολύ μακριές αλυσίδες είμαστε εντάξει.

Μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία για το μέρος που αφορά τις γραμμές και στήλες από $2N_1 + 2N_2 + 2$ ως $2N_1 + 2N_2 + 2N_3 + 2$: όλα επαναλαμβάνονται απaráλλαχτα και λαμβάνουμε την ίδια U . Το ίδιο συμβαίνει και για τα μέρη των γραμμών και των στηλών από $2N_1 + 2$ ως $2N_1 + 2N_2 + 2$, με την αλλαγή $w \rightarrow -w$, αφού $A_{2i+1,2i+2} = -w$ για τα στοιχεία που βρίσκονται εκεί.

Τώρα θεωρούμε τις ακόλουθες τρεις $((2N_1 + 2N_2 + 2N_3 + 2) \times 1) U$:

$$U_1 = (000(\frac{w}{u})^{N_1-1}0 \cdots 0 \frac{w}{u} 010 \cdots 0)^T, \quad (9.38)$$

$$U_2 = (000 \cdots 0(\frac{-w}{u})^{N_2-1}0 \cdots 0 \frac{-w}{u} 010 \cdots 0)^T, \quad (9.39)$$

$$U_3 = (000 \cdots 0(\frac{w}{u})^{N_3-1}0 \cdots 0 \frac{w}{u} 01)^T. \quad (9.40)$$

Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της U_2 είναι στη $(2N_1 + 2)$ -οστή γραμμή και το τελευταίο στη $(2N_1 + 2N_2 + 2)$ -οστή γραμμή, ενώ το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της U_3 είναι στη $(2N_1 + 2N_2 + 2)$ -οστή γραμμή.

Επιθεωρώντας τις, μπορούμε να δούμε ότι οι U ικανοποιούν την $(H + H_{chem})U = 0$ για αρκετά μακριές αλυσίδες (για μεγάλα N_1, N_2, N_3). Αυτό γιατί τα μη μηδενικά

στοιχεία του ολικού πίνακα της Hamiltonian $A_{1,2N_1+3} = u$, $A_{2,2N_1+2N_2+3} = u$ και τα αντισυμμετρικά τους δεν καταστρέφουν την κατασκευή μας, αφού κανένα εκ των U δεν έχει μη μηδενικό στοιχείο στην 1η, 2η, $(2N_1 + 3)$ -οστή ή $(2N_1 + 2N_2 + 3)$ -οστή γραμμή του. Επιπλέον, αφού τα δύο πρώτα στοιχεία σ' αυτές τις τρεις U είναι μηδενικά, το στοιχείο $A_{12} = -w$ και το αντισυμμετρικό του αφήνουν κι εκείνα την κατασκευή μας αλώβητη. Έτσι βρήκαμε τρία U τα οποία είναι μηδενικοί τρόποι Majorana εκ κατασκευής.

Τώρα θα δούμε ότι εδράζονται τοπικοποιημένα στα άκρα των αλυσίδων και η ύπαρξή τους φθίνει εκθετικά καθώς κινούμαστε προς το εσωτερικό -καθώς απομακρυνόμαστε από τα άκρα.

Θεωρούμε το μηδενικό τρόπο Majorana για την πρώτη αλυσίδα, ο οποίος είναι προφανέστατα ο U_1 . Οι άλλοι τρόποι Majorana μπορούν να μελετηθούν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

Όπως μπορούμε να δούμε, ο U_1 μπορεί να γραφεί στη βάση που θεωρήσαμε

$$U_1 = \gamma_{1,2N_1} + \frac{w}{u}\gamma_{1,2N_1-2} + \left(\frac{w}{u}\right)^2\gamma_{1,2N_1-4} + \cdots + \left(\frac{w}{u}\right)^{N_1-1}\gamma_{1,2} \quad (9.41)$$

(αγνοούμε τον παράγοντα κανονικοποίησης, αφού δεν επηρεάζει σε τίποτα το επιχείρημα που θα επικαλεστούμε).

Κινούμενοι από τα εξώτερα προς τα ενδότερα της αλυσίδας, η συνεισφορά από τους τρόπους Majorana φθίνει για $w < u$. Αυτό διότι το άκρο της αλυσίδας είναι το N_1 , το γειτονικό του το $N_1 - 1$ και ούτω καθ' εξής. Έτσι, το φερμιόνιο Majorana με τη μεγαλύτερη συνεισφορά στο U είναι το $\gamma_{1,2N_1}$, το οποίο εδράζεται στο πλεγματοειδές σημείο N_1 , το φερμιόνιο Majorana με τη δεύτερη μεγαλύτερη συνεισφορά είναι το $\gamma_{1,2N_1-2}$ το οποίο εδράζεται στο πλεγματοειδές σημείο $N_1 - 1$ (εκείνο δίπλα στο άκρο) και ούτω καθ' εξής.

Άρα, η συνεισφορά από τα Majorana καθώς κινούμαστε από τα εξώτερα προς τα ενδότερα φθίνει εκθετικά $e^{-k/\xi}$, όπου k είναι το βάθος σε αριθμό πλεγματοειδών σημείων και ξ το μήκος συσχέτισης, που σε αυτή την περίπτωση είναι ίσο με $\xi = \frac{1}{\ln \frac{u}{w}} = \frac{1}{\ln \frac{2t}{\mu}}$.

Στην ακραία περίπτωση $\mu = 0$ που μελετήσαμε νωρίτερα, το μήκος συσχέτισης μηδενίζεται, δηλαδή η εκθετική πτώση οδηγεί σε μηδενισμό αμέσως, ήδη από τον πρώτο πλεγματοειδή τόπο μετά το άκρο της αλυσίδας. Αυτό είναι εμφανές και από τη μορφή των U , αφού για $\mu = 0$ $w = 0$, οπότε η μόνη συνεισφορά έρχεται από το μη μηδενικό στοιχείο που ισούται με 1, το οποίο αντιστοιχεί στο μηδενικό τρόπο στο άκρο της κάθε αλυσίδας.

Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να βγουν και για το μηδενικό τρόπο γ_- ο οποίος εδράζεται κοντά στο σημείο διακλάδωσης, μόνο που η ύπαρξή του αναμενόμενα φθίνει προς τις αλυσίδες 1,3. Πράγματι, θεωρώντας τον τρόπο $U_4 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{w}{u}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{w}{u})^2, \dots, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{w}{u}, \dots)$, όπου το στοιχείο $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ αντιστοιχεί στον τρόπο $\gamma_{3,1}$, μπορούμε να δούμε ότι είναι μηδενικός για αρκετά μεγάλες αλυσίδες στο ίδιο παραμετρικό εύρος που είναι μηδενικοί και οι προηγούμενοι τρεις. Οπότε, και αυτό προστατεύεται τοπολογικά.

9.3 Η πολλαπλότητα του εκφυλισμού

Σύμφωνα με όσα είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, για μηδενικό χημικό δυναμικό οι μηδενικοί τρόποι είναι προστατευμένοι. Στη συνέχεια, αυξάνοντας την τιμή του χημικού δυναμικού, οι τρόποι αυτοί θα εξακολουθούν να επιβιώνουν -με την υπαρκτή τους να φθίνει προς το εσωτερικό της διάταξης -ή προς το εξωτερικό για τον κεντρικό τρόπο- ώσπου στην τιμή $\mu = 2t$ η τοπικοποίηση χάνεται και οι τρεις τρόποι δεν είναι πια στα άκρα -ούτε ο τέταρτος κοντά στο κέντρο. Μια φυσιολογική ερώτηση είναι γιατί συμβαίνει αυτό.

Για να απαντήσουμε, μπορούμε να θυμηθούμε τη βαθύτερη αιτία της υπαρκτής των μηδενικών τρόπων στη συνήθη αλυσίδα Kitaev. Εκεί, υπάρχει η συμμετρία σωματιδίων-οπών. Πρόκειται για μια συμμετρία η οποία ανταλλάζει ηλεκτρόνια και σπές και εκφράζεται από έναν αντιμοναδιακό τελεστή $C = \tau_x K$, όπου ο τ_x δρα στο χώρο σωματιδίων-οπών και ο K εκφράζει τη μιγαδική συζυγία. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι για κάθε κατάσταση με ενέργεια E θα υπάρχει και μια κατάσταση με ενέργεια $-E$, δηλαδή οι καταστάσεις έρχονται σε ζεύγη και οι ενέργειες είναι συμμετρικά τοποθετημένες γύρω από τη μηδενική ενέργεια. Αυτή είναι η παρατήρηση που θα αξιοποιήσουμε για να δικαιολογήσουμε το διπλό εκφυλισμό που συναντήσαμε στη διάταξή μας.

Παρότι επιλέξαμε μια παραλλαγή της αλυσίδας Kitaev, η συμμετρία σωματιδίων-οπών, υπάρχει και εδώ, τόσο για την αρχική Hamiltonian όσο και για εκείνη που προκύπτει παρουσία χημικού δυναμικού. Πράγματι, διαπλασιάζοντας τους φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας και θεωρώντας τους ανεξάρτητους -όπως γίνεται συνήθως όταν εξετάζουμε υπεραγωγούς- μπορούμε να γράψουμε τη Hamiltonian στη βάση $A^T = (a_1, a_2, \dots, a_N, a_1^\dagger, \dots, a_N^\dagger)$, όπου N είναι ο συνολικός αριθμός των φερμιονικών τελεστών της Hamiltonian. Τότε, ορίζοντας την ποσότητα H_{BdG} σύμφωνα με τη σχέση $H = \frac{1}{2} A^\dagger H_{BdG} A$ μπορούμε πάρα πολύ εύκολα να δείξουμε τη σχέση $C H_{BdG} C^{-1} = -H_{BdG}$. Αυτό είναι πολύ εύκολο να ερμηνευτεί φυσικά από το ότι η γενικότερη Hamiltonian που έχουμε γράψει ως τώρα διαθέτει όρους άλματος, υπεραγωγίσιμους όρους και (στην περίπτωση μη μηδενικού χημικού δυναμικού) όρους αριθμού κατάληψης πλεγματικών τόπων. Όλοι αυτοί οι όροι σέβονται τη συμμετρία σωματιδίων-οπών επομένως το ίδιο συμβαίνει και με την ολική Hamiltonian.

Εμείς βρήκαμε τέσσερις μηδενικούς τρόπους, οι οποίοι όμως δεν είναι φυσικοί βαθμοί ελευθερίας, καθώς είναι φερμιόνια Majorana. Την ίδια στιγμή, λόγω της συμμετρίας σωματιδίων-οπών και, συνακόλουθα, της συμμετρίας των ενεργειών γύρω από τη μηδενική, είναι προφανές ότι έχουμε άρτιο αριθμό φυσικών καταστάσεων μηδενικής ενέργειας. Επειδή έχουμε τέσσερα ανεξάρτητα φερμιόνια Majorana είναι προφανές ότι μπορούμε με αυτά να ορίσουμε δύο συμβατικούς φερμιονικούς τελεστές, οι οποίοι θα είναι ανεξάρτητοι τόσο μεταξύ τους όσο και από όλους τους άλλους φερμιονικούς τελεστές που έχουμε ορίσει για να διαγωνοποιήσουμε τη συνολική Hamiltonian. Ο αντίστοιχος χώρος Hilbert δύο διαφορετικών φερμιονικών τρόπων είναι τετραδιάστος. Επομένως, είναι κατανοητό ότι ο εκφυλισμός της θεμελιώδους στην περίπτωσή μας αναμένεται να είναι τετραπλός. Από αυτή τη σκοπιά, η πολλαπλότητα του εκφυλισμού εξάγεται μόνο μέσω της συμμετρίας.

Τώρα, η Hamiltonian μας, όπως και εκείνη της αλυσίδας Kitaev, σέβεται

τη συμμετρία σωματιδίων-οπών ανεξαρτήτως του σε ποιο παραμετρικό εύρος βρισκόμαστε. Οπότε εύλογα μπορεί να αναρωτηθεί κανείς για ποιο λόγο σε κάποιο παραμετρικό εύρος καταστρέφονται οι μηδενικοί τρόποι. Η απάντηση μπορεί να ληφθεί από τη Hamiltonian απουσία χημικού δυναμικού. Πράγματι, όταν τη διαγωνοποιήσαμε, αυτό που επί της ουσίας καταφέραμε να κάνουμε ήταν να βρούμε τις ενέργειες του κυρίως όγκου. Είναι προφανές ότι υπάρχει μη μηδενικό ενεργειακό χάσμα μεταξύ της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης, που σημαίνει ότι στον κυρίως όγκο δεν υπάρχουν μηδενικής ενέργειας διεγέρσεις. Επομένως, οι μηδενικοί τρόποι Majorana παραμένουν προστατευμένοι και τοπικοποιημένοι λόγω της ύπαρξης αυτού του μη μηδενικού ενεργειακού χάσματος. Πότε αναμένεται να αλλάξει αυτό; Προφανώς, όταν αποδώσουμε στο σύστημα αρκετή ενέργεια ώστε να περάσει στην πρώτη διεγερμένη. Από τη διαγωνοποιημένη Hamiltonian βλέπουμε λοιπόν ότι η απαιτούμενη ενέργεια για να αποτοπικοποιηθούν οι τρόποι Majorana είναι ίση με $2t$ (αντιστοιχεί στη δημιουργία ενός Γ φερμιονίου) και άρα επαληθεύεται από άλλη σκοπιά ότι η τιμή του χημικού δυναμικού πάνω από την οποία οι τρόποι Majorana πάνου να εδράζονται στα άκρα είναι $\mu = 2t$.

Ανακεφαλαιώνοντας, από την παραπάνω ανάλυση εξάγεται ότι οι μηδενικοί τρόποι είναι προστατευμένοι στα άκρα της αλυσίδας και στο κέντρο, αντίστοιχα, και αποδίδουν τετραπλά εκφυλισμένη θεμελιώδη εξαιτίας της συμμετρίας σωματιδίων-οπών και του μη μηδενικού χάσματος στον κυρίως όγκο της διάταξης. Αυτός ο εκφυλισμός μπορεί να αξιοποιηθεί για να στηθούν δύο συμβατικοί φερμιονικοί τρόποι, δηλαδή qubits. Αυτά τα qubits, λόγω του ότι τα συστατικά τους -οι μηδενικοί τρόποι- είναι απομακρυσμένα, είναι ακραία αποτοπικοποιημένοι, με αποτέλεσμα η πληροφορία που φέρουν να είναι προστατευμένη από τοπικές παρεμβολές (αρκεί βέβαια αυτές να μη δειγείρουν το σύστημα και να σέβονται τη συμμετρία σωματιδίων-οπών ώστε οι τρόποι να παραμένουν προστατευμένοι στις θέσεις τους).

Από τη σκοπιά της χβαντικής πληροφορίας, το ενδιαφέρον αυτής της διάταξης σε σχέση με τη συμβατική αλυσίδα Kitaev είναι ότι παρέχει τη δυνατότητα ανταλλαγής των φερμιονίων Majorana χωρίς την πρόσληψη εξωτερικών διατάξεων. Πράγματι, είναι εμφανές ότι ελέγχοντας τις παραμέτρους του προβλήματος μπορούμε να μετακινούμε τους μηδενικούς τρόπους: εφόσον, όπως εξηγήθηκε, οι μηδενικοί τρόποι εδράζονται στα άκρα τοπολογικών αλυσίδων, προφανώς αν θέλουμε να μετακινήσουμε πχ ένα μηδενικό τρόπο που εδράζεται στο άκρο κάποιας αλυσίδας, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θέσουμε τέτοιες παραμέτρους που να καθιστούν την αντίστοιχη αλυσίδα τοπολογικά τετριμμένη από το άκρο της έως το πλεγματικό σημείο όπου θέλουμε να μετακινήσουμε το μηδενικό τρόπο. Αυτό, από τα προηγούμενα, φαίνεται ότι μπορούμε να το κάνουμε ελέγχοντας πχ το χημικό δυναμικό. Τώρα, όσον αφορά τη συμβατική αλυσίδα Kitaev, είναι σαφές ότι δεν είναι εφικτή μια ανταλλαγή των φερμιονίων που εδράζονται στα άκρα της, κι αυτό γιατί, λόγω της γεωμετρίας της, μοιραία κατά τη διαδικασία ανταλλαγής τους θα συγκρούονταν. Αντίθετα, στη διάταξη που προτείνουμε, με κατάλληλο έλεγχο των παραμέτρων του προβλήματος θα μπορούσε να επιτευχθεί ανταλλαγή οποιονδήποτε δύο μηδενικών τρόπων. Αυτή η ανταλλαγή, εφόσον είναι ξεκάθαρα ένας μοναδιακός μετασχηματισμός, πραγματώνει μια χβαντική πύλη στα μη τοπικά qubits και άρα τέτοιου είδους διαδικασίες μπορούν να προσληφθούν για την πραγμάτωση χβαντικών υπολογισμών.

Κεφάλαιο 10

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Από τα ευρήματα αυτής της έρευνας, είναι πλέον σαφές ότι υπάρχει διαθέσιμος ένας συνεπής ορισμός του ολοκληρώματος διαδρομών με συνοχικές καταστάσεις. Η βάση του χάρτη από κβαντικές σε κλασικές Hamiltonians που προτείνουμε έχει στιβαρά μαθηματικά θεμέλια: στα μποζονικά και στα συστήματα spin τη μέθοδο της γεωμετρικής κβάντωσης με ημιμορφές και στα φερμιονικά συστήματα τη μέθοδο Faddeev-0Jackiw. Η ανάπτυξη, ωστόσο, των ιδεών που παρουσιάστηκαν παραπάνω δε σταματάει, βέβαια, εδώ. Μια ενδιαφέρουσα, μάλλον μαθηματικής φύσεως, κατεύθυνση θα ήταν να προσπαθήσει κανείς να επεκτείνει το εύρος των τελεστών στους οποίους μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος αποκβάντωσης που προτείνουμε. Αυτό θα μπορούσε να γίνει είτε με αναζήτηση μιας μεθόδου ανάλογης της γεωμετρικής κβάντωσης, η οποία να είναι όμως εφαρμόσιμη και για μη γραμμικούς τελεστές, είτε με χρήση πιο περίπλοκων αναλυτικών τεχνικών στο ολοκλήρωμα διαδρομών.

Επίσης, όσον αφορά τις φυσικές εφαρμογές, είναι ενδιαφέρον να προσεγγιστούν με αυτό το φορμαλισμό και άλλα συστήματα της φυσικής στερεάς κατάστασης, πέραν του μοντέλου XY με εξωτερικό πεδίο που αντιμετωπίσαμε παραπάνω. Ωστόσο, το μεγάλο ενδιαφέρον, κυρίως από τη σκοπιά της κβαντικής πληροφορίας, το έχουν τα ανοιχτά συστήματα. Ο συνήθης φορμαλισμός της κβαντομηχανικής για αυτά είναι ιδιαίτερος στρυφνός και οι δυνατότητες αναλυτικής προσέγγισης που παρέχει είναι περιορισμένες –ενώ δε μπορεί να αιχμαλωτίσει και οποιαδήποτε περιβάλλοντα. Αντιθέτως, ο ασφαλής ορισμός του ολοκληρώματος διαδρομών παρέχει τη δυνατότητα προσέγγισης αυτών των συστημάτων με χρήση κλασικών ποσοτήτων. Έτσι, ανοίγει ο δρόμος για τη μελέτη σημαντικών φαινομένων που τα αφορούν, όπως η αποσυνοχή, η διεμπλοκή και η θερμοποίηση. Είναι ευνόητο ότι η μελέτη αυτών των συστημάτων είναι στην καρδιά της προσπάσιας της κβαντικής πληροφορίας: είναι πολύ σημαντικό να είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε πώς επηρεάζεται ένα σύστημα, και άρα η πληροφορία που φέρει, από το περιβάλλον του.

Όσον αφορά τα μη τοπικά qubits, η επόμενη κατεύθυνση που θα μπορούσε να πάρει η μελέτη είναι η εφαρμογή κβαντικών πυλών σε αυτό. Οι κβαντικές πύλες είναι στην ουσία μοναδιαίοι μετασχηματισμοί. Αυτές οι πύλες μπορούν να πραγματοποιούν ελέγχοντας κατάλληλα τις παραμέτρους του προβλήματος και αντιστοιχούν

σε μετακινήσεις των επιμέρους φερμιονίων Majorana.

Τέλος, σημειώνεται ότι τα ευρήματα αυτής της εργασίας εκπορεύονται κυρίως από το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν για τη μελέτη της χβαντικής πληροφορίας. Ωστόσο, η χρησιμότητά τους δεν εξαντλείται σε αυτό το πεδίο, αλλά μπορούν να εφαρμοστούν και σε περεταίρω κλάδους της φυσικής, όπως η φυσική συμπυκνωμένης ύλης, η φυσική στερεάς κατάστασης κα.

Βιβλιογραφία

- [1] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva, M. Vengalatore *Rev. Mod. Phys.* 83,863 (2011)
- [2] A.J. Daley, C. Kollath, U. Schollweck, G. Vidal, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* 2004, P04005/ S.R. White, A.E. Feiguin, *Phys. Rev. Lett.* 93,076401 (2004)
- [3] A.E. Feiguin, S.R. White *Phys. Rev.* B72 020404 (R) (2005)
- [4] E. Cavoni, E. Ercolessi, P. Naldesi, L. Taddia and D. Vododla, *Phys. Rev.* B89 (10) (2013)
- [5] G. Vidal, J.I. Lattore, E. Rico and A. Kitaev, *Phys. Rev. Lett.* 90, 227902 (2003)
- [6] T.J. Osborne, M.A. Nielsen, *Phys. Rev.* A66, 032110 (2002)
- [7] A.O. Caldeira, A.J. Legget, *Physica A: Statistical Mechanics and Applications*, 121, 587 (2003)
- [8] R.P. Feynman, F.L. Vernon, *Annals of Physics* 24, 118 (1963)
- [9] G. Kordas, G.E. Pavlou and A.I. Karanikas, *Phys. Rev. A* 98 (1) 013637 (2018)
- [10] Jun-Hong An, Mang Feng, Wei-Min Zhang, *Quantum Information and Computation* 9, 317, (2009)
- [11] T.-C. Wei, S. Vishveshwara, P. M. Goldbart, arXiv:1012.4114 [quant-ph] (2010)
- [12] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* (World Scientific, 2006)
- [13] J.R. Klauder, *Path Integrals and their Applications in Quantum, Statistical and Solid State Physics* (Plenum Press, Antwerp, Belgium 1977). Edited by G. Papadopoulos and J. Devreese
- [14] A. Berezin, *Sov. Phys. Usp.* 23, (1980) 763

- [15] B. Braiorn-Orrs, M. Weyrauch, and M. V. Rakov, arXiv:1508.06508 [quant-ph] (2015)
- [16] G. Kordas, S.I. Mistakidis and A.I. Karanikas, Phys. Rev. A 90 (2014) 032104
- [17] G. Kordas, D. Kalantzis and A.I. Karanikas Ann.Physics 372 (2016) 226.
- [18] G. Kordas, S.I. Mistakidis and A.I. Karanikas, Phys. Rev. A99 (2019) 026102
- [19] E. Lieb, T. Schultz and D. Mattis, Ann. Physics. 16 (1961) 407
- [20] S. Sachdev Quantum Phase Transitions (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)
- [21] T.W.B. Kibble, J. Phys. A9 (1976) 1387; Phys. Rep. 67 (1980) 183
- [22] L. H. Zurek, Nature (London) 317 (1985) 505; Acta Phys. Pol. B24(1993) 1301; Phys. Rep. 276 (1996) 177
- [23] E.A. Kochetov, J. Phys. A Math. Gen. 31 (1998) 4473
- [24] A. Garg, E.A. Kochetov, K. Park and M. Stone, J. Math. Phys. 44 (2003) 48
- [25] A. Greco, J. Phys. A Math. Theor. 49 (2016) 155004
- [26] P. Jordan and E. Wigner, Z. Phys. 47 (1928) 631.
- [27] L. Faddeev and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1692
- [28] Tzu-Chieh Wei, Smitha Vishveshwara, Paul M. Goldbart, Quantum Inf. Comput. 11, 0326-0354 (2011)
- [29] U. Mosel, Path Integrals in Field Theory. An Introduction. (Springer, 2004)
- [30] P. Pleufty, Annals of Physics 57,79-90
- [31] W.H. Zurek, U. Dorner and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 10570
- [32] L. Cincio, J. Dziarmaga, M.M. Rams and W.H. Zurek, Phys. Rev. A75 (2007) 052321
- [33] L. Brown, Quantum Field Theory, Cambridge University Press
- [34] O. Nachtmann, Perturbative and non-Perturbative Aspects of Quantum Field Theory. H. Latal, N. Schwinger (Eds) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1997)
- [35] Morse and Feshbach Methods of Theoretical Physics part II, Mc Graw-Hill Book Company INC

- [36] R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* 20,367 (1948)
- [37] R.P. Feynman, *Phys. Rev.* 84, 108 (1951)
- [38] H. Karatsuji, and Y. Mizobushi, *J. Math. Phys.* 22, 757 (1981)
- [39] M. Shibata, and S. Takagi, *Int. J. Mod. Phys. B* 13, 107 (1999)
- [40] J.H. Wilson and V. Galitski , *Phys. Rev. Lett.* 106 110401 (2011)
- [41] Y. Weissman, *J. Chem. Phys.* 76, 4067 (1982)
- [42] M. Stone, K. Park, and A. Garg, *J. Math. Phys. (N.Y)* 41 8025 (2000)
- [43] J. R. Klauder , *The Feynman Path Integral: A Historical Slice*, in *A Garden of Quanta*, Eds. Arafume J. et al. (World Scientific Singapore) (2003), arXiv:quantph/0303034
- [44] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, (1985)
- [45] E. A. Kochetov, *Phys. Rev.* A99, 026101 (2019)
- [46] Brian C. Hall: *Quantum Theory for Mathematicians* Springer Science+Business Media New York 2013
- [47] M. Blau, *Lecture Notes: Symplectic Geometry and Geometric Quantization* (1992)
- [48] N.M.J. Woodhouse: *Geometric Quantization, Second Edition* Oxford University Press Inc., New York
- [49] V. P. Nair, arXiv:1606.06407 [hep-th] (2016)
- [50] Sniatycki J. (1980) Blattner-Kostant-Sternberg Kernels. In: *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*. Applied Mathematical Sciences, vol 30. Springer, New York, NY
- [51] R. J. Szabo, *Equivariant Cohomology and Localization of Path Integrals* SpringerVerlag Berlin Heidelberg (2000)
- [52] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511813917 (2006)
- [53] M. J. Gotay, H. B. Grundling, G. M. Tuynman, *Journal of Nonlinear Science, J. Nonlinear Sci.* Vol. 6: pp. 469-498 (1996)
- [54] R. Stratonovich, *Sov. Phys. Docl.* 2 416 (1958)
- [55] J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* 3 77 (1959)
- [56] M. B. Halpern, *Nucl. Phys. B* 173 504 (1980)

- [57] J. Holstein, H. Primakoff Phys. Rev. 58, 1113 (1940)
- [58] M. Combescure, D. Robert: Coherent States and Applications in Mathematical Physics Springer Science+Business Media B.V. 2012
- [59] Y. Yanay and E. J. Mueller, arXiv:quant-ph/1212.4802v2 (2013)
- [60] J. Pachos, Introduction to Topological Quantum Computation (Cambridge University Press, 2012)
- [61] J. Fu, J. Knolle, N. B. Perkins, arXiv:1801.09713v1 [cond-mat.str-el] (2018)
- [62] F. Wilczek, arXiv:1404.0637v1 [cond-mat.supr-con] (2014)
- [63] L.V. Keldysh, Sov. Phys. JETP 20 (1965) 1018
- [64] P. Lykourgias, I. Lyris, A. I. Karanikas, arXiv:2006.13720v1 [quant-ph] (2020)
- [65] Fermionic path integrals and correlation dynamics in a 1D XY system, I. Lyris, P. Lykourgias, A. I. Karanikas, Annals of Physics Volume 421, October 2020, 168286